Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Dreizehnter Band,

in 4 Heften.

Mit drei Kupfertafeln.

Berlin, 1835.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des dreizehnten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. (Mémoire lu à l'Académie des sciences de Paris, le lundi 30 Juillet 1833; par M. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.)	I.	1
2.	De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.	I.	55
5.	Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.	II.	93
6.	Die Sätze von Fourier und Sturm zur Theorie der algebraischen Gleichungen.	II.	119
8.	Zwei analytische Abhandlungen von Herrn *S. Loewenstern*, Cand. philos. zu Dorpat.	II.	159 u. 168
9.	Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. Von Herrn *E. E. Kummer*, Dr. phil.	II.	171
11.	Wie sich die Division mit Zahlen erleichtern und zugleich sicherer ausführen läfst, als auf die gewöhnliche Weise.	III.	209
12.	Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques. Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.	III.	219
14.	Einfacher Beweis eines Satzes der Combinationslehre. Vom Herrn Prof. Prof. Dr. *Förstemann* zu Danzig.	III.	237
15.	Zur Begründung und Erweiterung der Variationsrechnung. Von Herrn Dr. *A. Müller*, in Heidelberg.	III.	240
16.	Einiges von Näherungen in der Analysis. Von Herrn *N. W. Schulze*, Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt.	III.	250
17.	Two analytical essays by Mr. *W. H. Miller* and *Ch. Brooke*, prof. at St. Johns College at Cambridge.	III.	257 u. 260
21.	Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\sqrt{(a^2-b^2)}$ etc. Par Mr. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.	IV.	277
22.	Unterschiede der einfachen Functionen. Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg. (Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI. und No. 24. Band XII.)	IV.	292
23.	Fortsetzung des Vorigen. Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen.	IV.	315
24.	Fortsetzung des Vorigen. Unterschiede und Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen.	IV.	329
25.	Observationculae ad theoriam aequationum pertinentes. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.	IV.	340

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
26.	De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.	IV.	353
27.	Ein neuer Satz über die Primzahlen. Von dem Herrn Prof. der Math. Dr. *Steiner*, an der Universität zu Berlin.	IV.	356

2. Geometrie.

3.	Einige Sätze aus der Sphärik. Von Herrn *S. Loewenstern*, Cand. philos. zu Dorpat.	I.	79
4.	Beiträge zur sphärischen Trigonometrie. Von Herrn *C. A. Bretschneider*, Auditor beim Justiz-Collegio zu Gotha.	I.	85
7.	Schlufs dieser Abhandlung.	II.	145
8.	Einiges über die Flächen. Von Herrn *S. Löwenstern*, Cand. phil. zu Dorpat.	II.	163
10.	Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. Von Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Kiel.	III.	185
13.	Umkehrung des Ptolomäischen Satzes. Von Herrn Prof. Dr. *Förstemann*, zu Danzig.	III.	233
18.	Beitrag zur analytischen Sphärik. Von Herrn Prof. Dr. *E. Gudermann* zu Münster.	III.	262

3. Mechanik.

19.	Sur les pressions exercées par un corps pesant qui repose sur plusieurs appuis. Par Mr. *Pagani*, prof. ord. à la faculté des sciences de l'université de Liège.	III.	270

II. Angewandte Mathematik.

17.	An investigation of the caustics produced by successive reflexion at spherical surfaces. By Mr. *Miller*, prof. at St. Johns College at Cambridge.	III.	258
20.	Neue und directeste Methode, aus den gemessenen Höhen zweier bekannter Sterne und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe zu finden. (In Folge des Aufsatzes 34. im zweiten Bande dieses Journals S. 345.) Von dem Herrn Prof. Dr. *Gudermann*, zu Münster.	III.	274

Aufgaben und Lehrsätze.

28.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. Von dem Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.	IV.	361
	Druckfehler-Verzeichnifs.	IV.	364

1.

Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries.

(Mémoire lu à l'Académie des sciences de Paris, le lundi 30 Juillet 1833; par M. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.)

Nous commencerons ces recherches par l'examen des séries qui procèdent avec des termes alternativement positifs et négatifs, et nous insisterons particulièrement sur les moyens de calculs et de transformations à leur appliquer, parcequ'elles conduisent à des résultats utiles; qu'elles se présentent fréquemment dans les applications de l'analyse, et qu'il est souvent très facile d'y ramener le calcul des séries à termes constamment positifs, au moyen d'un changement de signe ou d'une transformation convenable, opérés dans les fonctions génératrices: c'est ce qui a lieu notamment pour les développemens des fonctions

$$(1-x)^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{n}}, \quad a^x = \frac{1}{a^{-x}}, \quad \log(1-x) = -\log\left(1+\frac{x}{1-x}\right),$$

dans lesquelles x est censé plus petit et n plus grand que l'unité.

Des séries purement numériques dont les termes, alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment ainsi que leurs différences.

1.

Représentons par s_n la somme des n premiers termes a_0, a_1, a_2 .... a_{n-1} d'une pareille série, supposés quelconques, et par a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} .... les valeurs absolues ou numériques des termes suivans, enfin par S la véritable valeur s_∞ de la série poussée à l'infini, ou ce qu'on nomme sa *limite*; de sorte qu'on ait

$$(a.) \qquad S = s_n + a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + a_{n+4} \text{ etc.}$$

En désignant, en général, par Δa_η la différences $a_\eta - a_{\eta+1}$ entre les valeurs absolues de deux termes consécutifs quelconques dont le premier est a_η et le second $a_{\eta+1}$, afin de n'avoir à considérer que des différences positives dans des suites qui seront ici supposées naturellement

décroissantes, on pourra successivement mettre la série proposée sous les formes suivantes:

$$(b)\quad S = s_n + \Delta a_n + \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+4} + \Delta a_{n+6} + \text{etc.}$$
$$(c.)\quad S = s_n + a_n - \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+5} - \text{etc.}$$
$$(d.)\quad S = s_n + a_n - a_{n+1} + \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+4} + \Delta a_{n+6} + \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui montre généralement que, dans une série à termes alternativement positifs et négatifs décroissans: 1°. La valeur absolue d'un terme quelconque, est plus grande que celle de la somme de tous les termes qui suivent, pris avec leurs signes; 2°. qu'en arrêtant la série à ce terme, la somme obtenue sera trop forte, si ce terme est positif, et trop faible, s'il est négatif, d'une quantité comprise entre les valeurs absolues du terme suivant et de sa différence à celui qui vient immédiatement après; 3°. qu'une pareille série sera toujours convergente, ou aura une limite $S = s_\infty$ finie, dès que les valeurs absolues de ses termes iront sans cesse en décroissant; ce que nous supposeront expressément dans tout ce qui va suivre *).

Ainsi, par exemple, on aura alternativement, dans la série proposée,

$$s_n < S,\quad s_n + a_n = s_{n+1} > S,\quad s_n + a_n - a_{n+1} = s_{n+2} < S \text{ etc.};$$

et, si l'on prend successivement $S = s_n$, $S = s_n + a_n$, $S = s_n + a_n - a_{n+1}$ etc., l'erreur commise sera au dessous de a_n pour la 1ière, de a_{n+1} pour la suivante, de a_{n+2} pour la 3ième, et ainsi de suite.

2.

Ces notions fondamentales étant rappelées, on remarquera que, puisque la valeur de S se trouve comprise entre celles de s_n et de $s_n + a_n$, elle pourra différer moins de leur moyenne arithmétique $s_n + \frac{1}{2} a_n$, que de chacune d'elles en particulier. Prenant, en effet, la demi-somme des expressions $(b.)$ et $(c.)$ de S, on trouve

$$(e.)\quad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}(\Delta a_n - \Delta a_{n+1} + \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} + \Delta a_{n+4} - \text{etc.}),$$

relation que nous appelerons la *transformée du* 1er *ordre* de la proposée

*) Nous supposerons en outre, afin d'éviter toute espèce de difficultés, que ces valeurs convergent vers zéro, ou que a_n devienne rigoureusement nul pour n infini. Dans le cas ou elles convergeraient vers une valeur finie quelconque, il se présenterait, généralement parlant, une détermination rélative au signe ou au rang du terme a_∞ placé à l'infini, vers la droite de la série; et cette indétermination ne pourrait être levée que dans des cas tout particuliers, où l'origine de la série serait bien connue; la même remarque est applicable aux séries de différences etc. dont il sera question par la suite.

(*a.*), relative au terme a_n, et dans laquelle la partie entre parenthèses, forme une série d'un genre analogue et jouissant des mêmes propriétés, si les différences Δa_n, Δa_{n+1}, Δa_{n+2}.... sont contamment décroissantes, ou, ce qui est la même chose, si les différences du 2° ordre

$$\Delta a_n - \Delta a_{n+1} = \Delta^2 a_n, \quad \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} = \Delta^2 a_{n+1}, \quad \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} = \Delta^2 a_{n+2} \text{ etc.}$$

sont toutes positives: circonstance qui a lieu dans une infinité de cas.

La série entre parenthèses, étant donc convergente, on aura,

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n \text{ à moins de } \tfrac{1}{2}\Delta a_n = \tfrac{1}{2}(a_n - a_{n+1});$$

de sorte que cette valeur de S, qui est trop faible, sera d'autant plus approchée que la série proposée sera moins convergente dans ses premiers termes, ou que le rapport de a_n à a_{n+1} s'approchera davantage de l'unité.

Mais, pour que cette même valeur de S soit plus exacte que celle $S = s_n + a_n$, il faut, tout au moins, que la limite de l'erreur qui lui est relative soit moindre que celle de cette dernière quantité, ou qu'on ait

$$\tfrac{1}{2}\Delta a_n < a_{n+1}, \text{ c'est à dire } \Delta a_n < 2a_{n+1}, \quad a_n < 3a_{n+1},$$

et l'on en sera complètement certain si la condition

$$\tfrac{1}{2}\Delta a_n < a_{n+1} - a_{n+2}, \text{ c'est à dire } \Delta a_n < 2\Delta a_{n+1},$$

se trouve en même tems satisfaite, puisque l'erreur de $s_n + a_n$ surpasse nécessairement $a_n - a_{n+1}$ ou Δa_n.

3.

Si le contraire avait lieu, il faudrait s'en tenir à la valeur $s_n + a_n$ donnée immédiatement par la série proposée, ou plutôt à la valeur $s_n + a_n - \tfrac{1}{2} a_{n+1} = s_{n+1} - \tfrac{1}{2} a_{n+1}$ que donne la transformée du 1er ordre

$$(f.) \quad S = s_n + a_n - \tfrac{1}{2} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}(\Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+4} + \text{etc.}),$$

relative aux termes qui suivent a_n dans la proposée, et qu'on obtient soit en prenant la demi-somme des expressions (*c.*) et (*d.*) de S, soit en remplaçant n par $n+1$ dans la transformée précédente (*e.*), après y avoir changé le signe des termes qui suivent s_n, soit enfin en fesant simplement sortir de la parenthèse de cette même transformée le 1er terme Δa_n; ce qui donne:

$$(f.) \quad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}\Delta a_n - \tfrac{1}{2}(\Delta a_{+1} - \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+4} + \text{etc.});$$

relation identique avec celle dont il s'agit à cause de $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, et sur laquelle d'ailleurs on peut raisonner comme on l'a fait ci dessus pour la relation (*e.*).

Ainsi on devra prendre

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}\Delta a_n = s_n + a_n - \tfrac{1}{2} a_{n+1},$$

valeur exacte a moins de $\tfrac{1}{2}\Delta a_{n+1}$, si l'on a

$a_{n+1} < 3\,a_{n+2}$ ou, plus rigoureusement, $\Delta a_{n+1} < 2\,\Delta a_{n+2}$,

et

$S = s_n + a_n - a_{n+1} + \frac{1}{2} a_{n+2}$ à moins de $\frac{1}{2}\Delta a_{n+2}$,

si l'inverse avait précisement lieu; ce qui revient à n'operer la transformation qu'a partir du terme suivant a_{n+2} de la série proposée.

4.

En continuant à raisonner ainsi, de proche en proche, on voit si l'on avait constammant pour un indice quelconque η, $a_\eta > 3\,a_{\eta+1}$, il n'y aurait aucun avantage sous le rapport de l'approximation, à remplacer la série $(a.)$ par l'une de ses transformées du 1er ordre, à quelque terme qu'elle appartînt; ce qui tient à ce que cette série serait, par elle même, très convergente. Nous verrons, plus tard, comment, dans cette circonstance, on doit modifier le procédé qui nous occupe; contentons nous pour le présent d'examiner le cas des séries peu convergentes où l'on a, dès le terme a_n et pour les suivans, $\Delta a_\eta < 2\,\Delta a_{\eta+1}$ ou, tout au moins, $a_\eta < 3\,\Delta a_{\eta+1}$. Voici comment, dans cette hypothèse, on pourra obtenir de nouvelles expressions de S plus approchées que les précédentes, ou dont les erreurs aient de plus petites limites.

Mettant les transformées (e) et $(f.)$ sous cette forme:

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}\,(\Delta^2 a_n + \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+4} + \text{etc.}),$$

$$S = s_n + a_n - \tfrac{1}{2} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}\,(\Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+3} + \Delta^2 a_{n+5} + \text{etc.}),$$

relations dont la dernière revient à la suivante:

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n - \tfrac{1}{2}\Delta a_n - \tfrac{1}{2}\,(\Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+3} + \Delta^2 a_{n+5} + \text{etc.});$$

prenant leur demi-somme membre à membre, il viendra, pour la transformée, du second ordre, relative à a_n,

$$(g.)\quad \begin{cases} S = s_n + \frac{3}{4} a_n - \frac{1}{4} a_{n+1} + \frac{1}{4}(\Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+2} - \Delta^2 a_{n+3} + \text{etc.}), \\ \text{ou} \\ S = s_n + \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{4}(\Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+2} - \Delta^2 a_{n+3} + \text{etc.}), \end{cases}$$

ce qui prouve que si les différences secondes $\Delta^2 a_n$, $\Delta^2 a_{n+1}$, $\Delta^2 a_{n+2}$ .... des termes successifs de la série proposée sont décroissantes comme les différences premières, ou si les différences 3^ièmes^ sont toutes positives, on aura

$S = s_n + \frac{3}{4} a_n - \frac{1}{4} a_{n+1} = s_n + \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4}\Delta a_{n+1}$, à moins de $\frac{1}{4}\Delta^2 a_n$.

Cette valeur est nécessairement plus approchée que celle de $s_n + \frac{1}{2} a_n$; mais elle ne surpassera, en exactitude la valeur de $s_n + a_n - \frac{1}{2} a_{n+1}$ fournie par la transformée du 1er ordre $(f.)$, qu'autant qu'on aurait, tout au moins,

$$\tfrac{1}{4}\Delta^2 a_n < \tfrac{1}{2}\Delta a_{n+1} \text{ ou } \Delta a_n < 3\,\Delta a_{n+1}.$$

S'il en était autrement, il faudrait recourir à la transformée du second ordre

$$S = s_n + a_n - \tfrac{3}{4} a_{n+1} + \tfrac{1}{4} a_{n+2} - \tfrac{1}{4}(\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+3} - \text{etc.}),$$

ou $S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4} \Delta a_n + \tfrac{1}{4} \Delta^2 a_n - \tfrac{1}{4}(\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+3} - \text{etc.})$,

qu'on déduit des précédentes (*g*.), en fesant sortir, de la parenthèse, le 1er terme $\Delta^2 a_n$, et qui donne

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4} \Delta a_n + \tfrac{1}{4} \Delta^2 a_n = s_n + a_n - \tfrac{3}{4} a_{n+1} + \tfrac{1}{4} a_{n+2},$$

à moins de $\tfrac{1}{4} \Delta^2 a_{n+1}$; valeur par conséquent plus exacte que celle

$$s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4} \Delta a_{n+1}.$$

5.

On peut poursuivre ce raisonnement tant que les différences des ordres successifs seront constamment décroissantes, ou que celles de l'ordre $\mu + 1$ immédiatement supérieur à l'ordre μ auquel on s'arrête, demeureront toutes positives. Si, de plus, la condition $\Delta^\mu a_n < 3 \Delta^\mu a_{n+1}$ se trouve satisfaite pour tous les ordres inférieurs à μ, l'approximation sera très rapide, et elle le sera le plus qu'il est possible, eu égard au nombre des termes employés, si l'on a, en même tems, $\Delta^{\mu+1} a_n < 2 \Delta^{\mu+1} a_{n+1}$ pour ces différens ordres. On trouvera ainsi, pour la transformée de l'ordre μ relative au terme a_n,

$$(h).\quad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4} \Delta a_n + \tfrac{1}{8} \Delta^2 a_n \ldots .$$

$$\ldots . + \frac{1}{2^\mu} \Delta^{\mu-1} a_n + \frac{1}{2^\mu}(\Delta^\mu a_n - \Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^\mu a_{n+2} - \Delta^\mu a_{n+3} + \text{etc.});$$

et par conséquent

$$(i.)\quad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4} \Delta a_n + \tfrac{1}{8} \Delta^2 a_n \ldots . + \frac{1}{2^\mu} \Delta^{\mu-1} a_n, \text{ à moins de } \frac{1}{2^\mu} \Delta^\mu a_n.$$

6.

Cette dernière expression de S, supposée prolongée à l'infini, est précisement celle à laquelle *Euler* est arrivé, par une autre voie, dans ses *Institutiones calculi differentialis* (Pars II. de *transformatione serierum*, pag. 232 et seq.), et dont il a tiré un très grand parti pour la sommation des séries peu convergentes ou mêmes divergentes *). Mais *Euler* n'a pas fait connaître l'expression ci-dessus du reste ou complément

*) Voyez aussi, au sujet de ces recherches *d'Euler*, l'excellent *Traité de calcul différentiel et intégral* de Mr. *Lacroix*, 2ième édition, in 4°. Tome III. pag. 346. No. 1124. Ce célèbre professeur observe, avec raison, que le résultat *d'Euler* peut conduire à des difficultés dans beaucoup de cas, et notamment quand on l'applique à des séries divergentes, ainsi que l'a fait cet illustre géomètre à l'égard de plusieurs séries, purement numériques, parmi lesquelles M. *Lacroix* a principalement cité la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$$

qui, ayant toutes ses différences nulles, conduit à la valeur $s = \tfrac{1}{2}$, tandis que, dans la

de la transformée supposé arrêtée à un terme quelconque; reste qui constitue, par lui même, une série remarquable du genre de la proposée, qu'on obtiendrait difficilement par l'analyse de cet illustre géomêtre, et qui, en permettant d'assigner les limites de l'erreur commise, règle la marche à suivre dans chaque cas, lorsqu'il sagit d'obtenir la plus grande approximation possible de l'emploi d'un nombre de termes donné de la série proposée. Ce qui precèdé montre, en effet, qu'il arrivera bien des cas ou la transformée (*i.*) relative au terme a_n de la série et à ses différences, pourra conduire à des valeurs moins exactes que celles qu'on obtiendrait, à moins de frais, des transformées d'ordres inférieurs, mais relatives à des termes plus avancés de cette série.

Pour démontrer la chose d'une manière générale, nous reprendrons nos premiers raisonnemens en les appliquant à la transformée ci-dessus (*h.*) de l'ordre quelconque μ. Supposant notamment que cette transformée soit celle pour laquelle on cesse précisement d'avoir $\Delta^\mu a_n < 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$, de sorte qu'on ait, au contraire $\Delta^\mu a_n > 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$, on voit qu'on devra arrêter la série (*i.*) au terme $\frac{1}{2^\mu}\,\Delta^{\mu-1} a_n$, puisque les limites de l'erreur relative aux termes suivans, deviendraient supérieures à celles qui se rapportent à des termes moins avancés dans les séries analogues concernant a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}.

7.

Fesant, en effet, sortir de la parenthèse, dans l'équation (*h.*), le 1er terme $\Delta^\mu a_n$, on obtiendra la nouvelle transformée de l'ordre μ,

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_n + \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n - \frac{1}{2^\mu}(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \text{etc.}),$$

qui d'après ce que nous avons vu (3. et 4.) pour le cas particuliers de $\mu = 1$, $\mu = 2$, coïncide avec cette autre:

---

réalité, la somme de cette série est susceptible d'une infinité de limites distinctes selon l'origine dont elle provient.

Cette difficulté qui a été levée ou plutôt expliquée par *Lagrange* (Voy. la note de la p. 160 du T. III. de l'ouvrage cité), n'a pas lieu quand on a soin de n'appliquer les transformations qu'à des séries convergentes ou dont les termes s'approchent indéfiniment de 0 (1.), conformément à ce qui a été admis dans tout ce qui précède, et de façon qn'on puisse assigner avec certitude, pour chaque cas, les limites des erreurs commises.

$$(i.)\quad S = s_n + a_n - \tfrac{1}{2}a_{n+1} - \tfrac{1}{4}\Delta a_{n+1} - \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_{n+2} \ldots .$$
$$\ldots . - \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_{n+1} - \frac{1}{2^\mu}(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \text{etc.}),$$

relative au terme suivant a_{n+1} de la série proposée: ce qu'on peut d'ailleurs constater directement et très simplement en observant qu'on a généralement

$$\frac{1}{2^x}\Delta^{x-1} a_n + \frac{1}{2^x}\Delta^x a_n = \frac{1}{2^{x-1}}\Delta^{x-1} a_n - \frac{1}{2^x}\Delta^{x-1} a_{n+1},$$

puis en fesant, membre à membre, la somme de toutes les relations pareilles obtenues en donnant successivement à x les différentes valeurs comprises depuis 1 jusqu'à μ inclusivement.

On aura donc, avec un degré d'approximation nécessairement supérieur à celui que comporte l'expression (*i.*),

$$(k.)\quad \begin{cases} S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots . + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_n + \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n, \\ S = s_n + a_n + \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{4}\Delta a_{n+1} - \frac{1}{8}\Delta a_{n+2} \ldots . - \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_{n+1}, \end{cases}$$

à moins de $\frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1}$.

Si, de plus, on prend la demi-somme des transformées (*h.*) et (*i.*), il viendra, pour celle de l'ordre $\mu+1$, relative au terme a_n et à ses différences successives,

$$(l.)\quad S = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots . + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_n + \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_n$$
$$+ \frac{1}{2^{\mu+1}}(\Delta^{\mu+1} a_n - \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+2} - \Delta^{\mu+1} a_{n+3} + \text{etc.});$$

et, par conséquent, si les différences $\Delta^{\mu+1} a_n$, $\Delta^{\mu+1} a_{n+1}$, $\Delta^{\mu+1} a_{n+3}$, relatives à cet ordre, continuent à être décroissantes, ce qui exige simplement que celles de l'ordre $\mu+2$ soient toutes positives, on aura

$$(m.)\quad S = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots . + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu+1} a_n + \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_n,$$

à moins de $\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1} a_n$.

Cette expression est, à la vérité, plus approchée que ne l'est celle (*i.*) qui lui correspond dans l'ordre immédiatement inférieur, mais elle pourra l'être moins que (*k.*), quand sa limite surpassera celle de cette dernière, ou qu'on aura

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1} a_n > \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1}, \text{ c'est à dire } \Delta^\mu a_n > 3\,\Delta^\mu a_{n+1};$$

par conséquent si cette dernière inégalité continue à avoir lieu dans les ordres supérieurs à μ, il sera avantageux, sous le rapport de l'approximation, de substituer $(k.)$ à $(i.)$; ce qui suppose d'ailleurs que l'on ait, pour la première et pour tous ces ordres, $\Delta^{\mu} a_{+1} < 3\,\Delta^{\mu} a_{n+2}$. En effet, dès que cette condition cessera d'être satisfaite, on devra remplacer, à son tour, l'expression $(k.)$ par celle qui se rapporte au terme a_{n+2} de la proposée, et ainsi de suite, à mesure qu'on admettra un plus grand nombre de termes de cette dernière série dans les calculs, ou qu'on voudra atteindre des ordres de plus en plus élevés.

8.

On se rappellera, au surplus, d'après ce qui a été dit relativement au cas de $\mu = 1$, $\mu = 2$, que la condition $\Delta^{\mu} a_n > 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1}$, n'offre qu'un indice ou, en quelque sorte, une présomption de la supériorité d'exactitude de la formule $(k.)$ sur celle $(m.)$, et que, pour en acquérir la certitude parfaite, il est nécessaire de recourir aux conditions relatives aux limites inférieures des erreurs qu'on risque de commettre dans chaque cas.

Posant, en effet,

$$\begin{aligned}
b_n &= \Delta^{\mu} a_n - \Delta^{\mu} a_{n+1} + \Delta^{\mu} a_{n+2} - \Delta^{\mu} a_{n+3} + \text{etc.} \\
&= \Delta^{\mu+1} a_n + \Delta^{\mu+1} a_{n+2} + \Delta^{\mu+1} a_{n+4} + \text{etc.}, \\
b'_n &= \Delta^{\mu} a_n - b_n = \Delta^{\mu} a_{n+1} - \Delta^{\mu} a_{n+2} + \Delta^{\mu} a_{n+3} - \text{etc.} \\
&= \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+3} + \Delta^{\mu+1} a_{n+5} + \text{etc.}, \\
b_{n+1} &= b_n - b'_{n+1} = \Delta^{\mu+1} a_n - \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+2} - \Delta^{\mu+1} a_{n+3} + \text{etc.} \\
&= \Delta^{\mu+2} a_n + \Delta^{\mu+2} a_{n+2} + \Delta^{\mu+2} a_{n+4} + \text{etc.};
\end{aligned}$$

de sorte que les restes ou erreurs relatives à $(i.)$, à $(k.)$ et à $(m.)$, seront respectivement représentées par les expressions

$$\frac{1}{2^{\mu}} b_n, \qquad \frac{1}{2^{\mu}} b'_n, \qquad \frac{1}{2^{\mu+1}} b_{n+1},$$

on aura évidemment, d'après les propriétés des séries ci-dessus, supposées convergentes,

$$b_n < \Delta^{\mu} a_n > \Delta^{\mu+1} a_n = \Delta^{\mu} a_n - \Delta^{\mu} a_{n+1}, \quad b'_n < \Delta^{\mu} a_{n+1} > \Delta^{\mu+1} a_{n+1} = \Delta^{\mu} a_{n+1} - \Delta^{\mu} a_{n+2},$$

$$b_{n+1} < \Delta^{\mu+1} a_n > \Delta^{\mu+2} a_n = \Delta^{\mu+1} a_n - \Delta^{\mu+1} a_{n+1};$$

ce qui donne, *a fortiori*,

$$\frac{1}{2^{\mu+1}} b_{n+1} > \frac{1}{2^{\mu}} b'_n \text{ si } \frac{1}{2^{\mu+1}} \Delta^{\mu+2} a_n > \frac{1}{2^{\mu}} \Delta^{\mu} a_{n+1}, \text{ ou } \Delta^{\mu} a_n > 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$

$$\frac{1}{2^{\mu+1}} b_{n+1} < \frac{1}{2^{\mu}} b'_n \text{ si } \frac{1}{2^{\mu+1}} \Delta^{\mu+1} a_n < \frac{1}{2^{\mu}} \Delta^{\mu+1} a_{n+1}, \text{ ou } \Delta^{\mu} a_n < 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1} - 2\Delta^{\mu} a_{n+2}.$$

Lors donc que cette dernière condition sera satisfaite, on pourra affirmer, *a fortiori*, que l'erreur relative à (*m.*), sera moindre que celle qui se rapporte à (*k.*); et, si c'est, au contraire, la première qui l'est, on sera certain que l'inverse aura précisement lieu. Mais, dans tous les cas où l'on aurait, à la fois

$$\Delta^\mu a_n > 3\,\Delta^\mu a_{n+1} - 2\,\Delta^\mu a_{n+2} < 3\,\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^\mu a_{n+1},$$

et où par conséquent la valeur de $\Delta^\mu a_n$ se trouverait comprise entre

$$3\,\Delta^\mu a_{n+1} - 2\,\Delta^\mu a_{n+2} \text{ et } 3\,\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$

on serait complètement incertain quelle est celle des deux expressions (*k.*) ou (*m.*) qui est la plus exacte; du moins ne pourrait on rien prononcer sans un examen circonstancié de la loi que présentent les différences des divers ordres de la proposée.

9.

Or, de cette incertitude même, il résulte une conséquence importante, et qui permet d'obtenir, avec un égal nombre de termes de cette série, une valeur de S à la fois plus approchée que celles fournies par (*k.*) et par (*m.*). En effet, puisqu'on a

$$b_{n+1} > 2b'_n \text{ quand } \Delta^\mu a_n > 3\,\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$
$$b_{n+1} < 2b'_n \text{ quand } \Delta^\mu a_n < 3\,\Delta^\mu a_{n+1} - 2\,\Delta^\mu a_{n+2},$$

il faut que $\Delta^\mu a_n$ se trouve compris entre ces deux dernières limités quand la relation $b_{n+1} = 2b'_n$ est rigoureusement satisfaite; et c'est ce qui arrive précisement lorsque μ et n ont été choisis de façon qu'on ait sensiblement $\Delta^\mu a_n = 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$. La différence entre b_{n+1} et $2b'_n$, n'étant donc alors qu'une fraction assez petite de chacune d'elles, et l'expression $\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_{n+1} - 2b'_n)$ de l'erreur relative à la moyenne de (*k.*) et de (*m.*), ne dépendant que de cette différence, il faut que cette moyenne s'approche aussi d'avantage de la vraie valeur de S que ne le font séparement (*k.*) et (*m.*).

10.

Du reste, il est facile de voir, attendu que les expressions de b_{n+1} et b'_n constituent des séries convergentes du genre de la proposée, que les quantités

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\,\Delta^\mu a_{n+1} + 2\,\Delta^\mu a_{n+2}), \quad \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\,\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1})$$

sont précisement (1.) les limites de l'erreur qu'on risque de commettre en adoptant, pour S, la moyenne des valeurs données par (*k.*) et par (*m.*); c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_n - 3\,b'_n) < \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\,\Delta^\mu a_{n+1} + 2\,\Delta^\mu a_{n+2})$$
$$< \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\,\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1}).$$

Dans le cas particulier où μ et n sont tels que $\Delta^\mu a_n = 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$ rigoureusement, les limites ci-dessus deviennent respectivement:

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_{n+2}, \qquad -\frac{1}{2^{\mu+2}}\Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$

dont la plus grande, si on les prend abstraction faite du signe, surpasse évidemment la valeur absolue de l'erreur, et se trouve, en effet, être moindre que les limites supérieures

$$\frac{1}{2_\mu}\Delta^\mu a_{n+1}, \qquad \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1} a_n = \frac{1}{2^{\mu+1}}(\Delta^\mu a_n - \Delta^\mu a_{n+1}) = \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1},$$

des erreurs relatives aux expressions (*k.*) et (*m.*).

11.

Quant à l'expression générale et rigoureuse de l'erreur relative à la moyenne de (*k.*) et de (*m.*), on peut lui donner successivement les formes suivantes, qui nous paraissent également dignes de remarque, et dont la loi est facile à saisir:

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_{n+1} - 2\,b'_n)$$
$$= \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^{\mu+1} a_n - 3\,\Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+2} - 3\,\Delta^{\mu+1} a_{n+3} + \Delta^{\mu+1} a_{n+4} - 3\,\Delta^{\mu+1} a_{n+5} + \text{etc.})$$
$$= \frac{1}{2^{\mu+2}}[\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} - (\Delta^\mu a_{n+1} - 3\Delta^\mu a_{n+2}) + (\Delta^\mu a_{n+2} - 3\Delta^\mu a_{n+3}) - (\Delta^\mu a_{n+3} - 3\Delta^\mu a_{n+4}) + \text{etc.}]$$
$$= \frac{1}{2^{\mu+2}}[\Delta^\mu a_n - 4(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \Delta^\mu a_{n+4} + \Delta^\mu a_{n+5} - \text{etc.})].$$

On trouverait, au surplus, facilement des limites de cette erreur, beaucoup plus resserrées que celles qui ont été rapportées ci-dessus, en faisant intervenir, dans leur expression, un plus grand nombre de termes des séries qui en représentent la valeur *); mais le calcul de ces limites

---

*) On a, en effet (8.),

$$2\,b_{n+1} = 2\,\Delta^\mu a_{n+1} - (2\,\Delta^\mu a_{n+2} - 2\,\Delta^\mu a_{n+3} + 2\,\Delta^\mu a_{n+4} - \text{etc.}) = 2\,\Delta^\mu a_{n+1} - \delta,$$
$$b_n - b_{n+1} = \Delta^{\mu+1} a_n - (\Delta^{\mu+1} a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+2} + \Delta^{\mu+1} a_{n+3} - \text{etc.}) = \Delta^{\mu+1} a_n - \delta';$$

et, attendu que les séries δ et δ' sont censées convergentes (2.),

$$\delta < 2\,\Delta^\mu a_{n+2} - \Delta^\mu a_{n+3} > 2\,\Delta^{\mu+1} a_{n+2}, \qquad \delta' < \Delta^{\mu+1} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}\,\Delta^{\mu+1} a_{n+2} > \Delta^{\mu+2} a_{n+1};$$

ce qui donne, en général,

devenant de plus en plus laborieux, il sera préférable, en général, de s'en tenir aux précédentes qui suffiront, dans la plupart des cas, pour donner une idée du degré d'approximation obtenu, si, mieux encore, on ne préfère, dans la vue d'éviter tout à fait ce calcul lors des applications numériques, de déterminer immédiatement les valeurs de (*i.*) et de (*k.*), pour en conclure celle de leur moyenne arithmétique (*m.*), puis enfin celle de la moyenne semblable relative à (*m.*) et à (*k.*). En effet, les chiffres décimaux communs à ces derniers nombres, mettront en état d'apprécier, à moins d'une demi-unité du dernier de ces chiffres, le degré d'exactitude obtenu.

12.

Les discussions qui précèdent indiquent la marche à suivre, dans chaque circonstance particulière, pour tirer un parti avantageux du mode de transformation proposé, et notamment pour arriver au plus grand degré d'approximation possible eu égard au nombre des termes employés dans les calculs. Mais on abrégera beaucoup ces discussions au moyen des considérations qui suivent.

On remarquera, en effet, que la série proposée (*a.*) étant censée donnée par la loi régulière de ses termes, du moins à partir de a_n, qui peut être indifféremment positif ou négatif, puisqu'il n'y a qu'un simple changement de signe à opérer, on connaîtra aussi la loi des différences des divers ordres relatives au terme général a_η, de cette série, dont le rang est marqué par η, ce qui donnera l'expression de $\Delta^\mu a_n$, $\Delta^\mu a_{n+1}$ en fonction de η, de μ et de constantes, et par suite, celle de leur rapport que nous représenterons par $\varphi(\mu,\eta):\psi(\mu,\eta)$, en le supposant réduit à son expression la plus simple. Posant ensuite

$$\frac{\varphi(\mu,\eta)}{\psi(\mu,\eta)}=\zeta, \quad \text{ou} \quad \varphi(\mu,\eta)-\zeta\psi(\mu,\eta)=0,$$

cette équation, qui est à trois variables, fera connaître la loi qui lie en-

---

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_n-b_{n+1}-2b_{n+1})$$

$$=\frac{1}{2^{\mu+2}}(\delta-\delta')<\frac{1}{2^{\mu+2}}(2\Delta^\mu a_{n+2}-\Delta^\mu a_{n+3}-\Delta^{\mu+2}a_{n+1})>\frac{1}{2^{\mu+2}}(2\Delta^{\mu+1}a_{n+2}-\Delta^{\mu+1}a_{n+1}+\tfrac{1}{2}\Delta^{\mu+1}a_{n+2})$$

ou, par les transformations relatives aux différences,

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_n-3b_{n+1})<\frac{1}{2^{\mu+2}}(2\Delta^{\mu+1}a_{n+2}-\Delta^{\mu+1}a_{n+1}+\Delta^\mu a_{n+2})>\frac{1}{2^{\mu+2}}(2\Delta^{\mu+1}a_{n+2}-\Delta^{\mu+1}a_{n+1}+\tfrac{1}{2}\Delta^{\mu+1}a_{n+2}).$$

treux les nombres ζ, μ et η, et pourra tenir lieu complètement de la série proposée, du moins a compter de a_n, si l'on a soin de n'y attribuer à μ et à η que des valeurs entières et positives.

En premier lieu, elle mettra à même de reconnaître, sur le champ, si la valeur de ζ est constamment décroissante, dans chaque ordre μ de différences, avec le nombre η qui marque le rang des termes, et à partir dequel terme cette circonstance a précisément lieu; ce qui est indispensable pour l'application de la méthode qui nous occupe.

Posant enfin l'équation

$$\varphi(\mu, \eta) - 3\psi(\mu, \eta) = 0,$$

qui peut être censée représenter une courbe plane aux coordonnées rectangulaires μ et η, lorsque la première represente une surface toute entière aux coordonnées ζ, μ et η, elle fera pareillement connaître, pour chaque ordre de différences, le rang η du terme passé lequel l'inégalité $\Delta^\mu a_\eta < 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$ va se changer en l'inégalité inverse $\Delta^\mu a_\eta > 3\,\Delta^\mu a_{\mu+1}$ et réciproquement.

13.

Supposant notamment qu'on se donne le rang n du terme de la série proposée qu'on veut soumettre aux transformations dont il sagit, l'équation

$$\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0$$

résolue par rapport à μ fera découvrir l'ordre μ auquel on doit arrêter ces transformations pour être certain qu'on a constamment $\Delta^\mu a_n < 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$ depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \mu' - 1$, c'est-à-dire dans tous les ordres inférieurs à μ'; ce qui est indispensable, comme on l'a vu (7.), pour que la formule (*i.*) soit d'une application avantageuse. Il ne s'agira, en effet, que de prendre pour μ' un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à la plus grande des racines positives de l'équation ci-dessus; car la fonction $\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n)$ ne pouvant, dès lors, changer de signe pour les valeurs de μ comprises entre μ' et 0, elle sera constamment négative si seulement elle l'est pour $\mu = 0$; ce qui a lieu, par hypothèse, puisqu'autrement on devrait, d'après nos principes, substituer au terme a_n de la proposée, quelqu'un de ceux qui le suivent.

Mais, afin d'être positivement assuré que la valeur donnée par la formule (*i.*), lorsqu'on y suppose $\mu = \mu'$, est la plus approchée possible, il faudra, en outre, examiner (6.) si, pour toutes les valeurs entières de μ comprises depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = \mu'$, on a constamment

ζ ou $\frac{\varphi(\mu,n)}{\chi(\mu,n)}<2$ ou tout au plus $=2$:

condition facile à vérifier, mais qui n'est point absolue, et qui pourra être supplée avantageusement par les considérations qui ressortent directement de l'équation

$$\varphi(\mu,\eta)-3\psi(\mu,\eta)=0.$$

En effet si le nombre n égale ou surpasse la plus grande des racines positives de cette équation, lorsqu'on y donne successivement à μ toutes les valeurs entières comprises depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=\mu'$, l'expression qui constitue son premier membre, et par conséquant la différence $\Delta^{\mu}a_{\eta}-3\Delta^{\mu}a_{\eta+1}$ conserveront un signe invariable dans la même étendue, et cela depuis $x=n$ jusqu'a η infini; ce signe sera d'ailleurs négatif puisque, par hypothèse, on a

$$\Delta^{0}a_n<3\Delta^{0}a_{n+1} \quad \text{ou} \quad a_n<3a_{n+1}.$$

Donc aussi on pourra affirmer, avec certitude, que, depuis l'ordre $\mu=0$ jusqu'à l'ordre $\mu=\mu'-1$, la valeur de (*m.*) est constamment plus approchée que celle (*k.*), attendu que, pour tout cet intervalle la quantité

$$\Delta^{\mu+1}a_n-3\Delta^{\mu+1}a_{n+1}+\Delta^{\mu+1}a_{n+2}-3\Delta^{\mu+1}a_{n+3}+\Delta^{\mu+1}a_{n+4}-3\Delta^{\mu+1}a_{n+5}+\text{etc.},$$

qui représente (6. et 11.) la valeur de $b_{n+1}-2b'_n$, sera elle même negative, et par conséqnent $b_{n+1}<2b'_n$.

Quant à l'ordre μ', il est aisé de voir qu'il arrivera généralement, à moins que n ne corresponde précisement à une maximum absolu de x dans l'équation indéterminée

$$\varphi(\mu,\eta)-3\psi(\mu,\eta)=0,$$

que l'on aura $\Delta^{\mu+1}a_{\eta}>3\Delta^{\mu+1}a_{\eta+1}$ tout au moins pour $x=n$. Car ayant choisi, par l'hypothèse, μ' de façon que $\varphi(\mu',n)-3\psi(\mu'n)$ soit nul ou très petit, la quantité $\varphi(\mu,n)-3\psi(\mu',n)$ changera de signe dans le passage de $\mu=\mu'-1$ à $\mu=\mu'+1$; on ne pourra donc plus affirmer que b_{n+1} est plus petit que $2b'_n$, ou (*m.*) plus exact que (*k.*) pour l'ordre μ' dont il sagit; ce qui fera retomber dans le cas d'indécision mentionné au No. 9., et conduira à prendre, pour la valeur S de la série proposée, la moyenne arithmétique entre ces dernières quantités.

14.

La discussion qui vient de nous occuper, se simplifie beaucoup, dans la plupart des applications, soit parceque les fonctions $\varphi(\mu,\eta)$, $\psi(\mu,\eta)$ ont elles mêmes une forme très simple, soit parcequ'on prétend se

borner aux premiers ordres de différences ou aux premiers termes de la série proposée. Mais, avant de passer aux exemples numériques qui sont indispensable pour en bien saisir l'esprit, il ne sera pas inutile de montrer comment on peut transformer les expressions de (*i.*) et de (*k.*) en d'autres qui ne dépendent directement que des termes mêmes de la série proposée.

Il ne sagit, pour cela, que d'y remplacer les différences qui y entrent, par leurs valeurs en fonction de ces termes; ce qui leur donnera évidemment la forme

$$(i'.)\quad S = s_n + \frac{1}{2^\mu}(\alpha_1 a_n - \alpha_2 a_{n+1} + \alpha_3 a_{n+2} \ldots . \pm \alpha_{\mu-1} a_{n+\mu-2} \mp \alpha_\mu a_{n+\mu-1}),$$

$$(k'.)\quad S = s_n + \frac{1}{2^\mu}(2^\mu a_n - \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_{n+2} \ldots . \pm \alpha_{\mu-2} a_{n+\mu-2} \mp \alpha_{\mu-1} a_{n+\mu-1}),$$

en réduisant tous les termes, indépendans de s_n, au même dénominateur 2^μ, et α_1, α_2, α_3, ... α_μ étant des coëfficiens numériques à déterminer.

Or, d'après la nature de ces expressions de S, la seconde doit (7.) être égale à la premiere augmentée de $\frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n$, ou, si l'on veut, on doit avoir identiquement

$$(2^\mu - \alpha_1) a_n - (\alpha_1 - \alpha_2) a_{n+1} + (\alpha_2 - \alpha_3) a_{n+2} \ldots .$$
$$\ldots . \pm (\alpha_{\mu-2} - \alpha_{\mu-1}) a_{n+\mu-2} \mp (\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu) a_{n+\mu-1} \pm a_n a_{n+\mu} = \Delta^\mu a_n ;$$

et, comme, d'après les principes connus du calcul des différences finies, différences qu'il convient ici de prendre (1.) dans un ordre inverse,

$$\Delta^\mu a_n = a_n - \frac{\mu}{1} a_{n+1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} a_{n+1} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} a_{n+1}$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4} a_{n+4} - \text{etc.},$$

il faut qu'on ait séparement

$$2^\mu \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\mu}{1}, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}, \quad \alpha_3 - \alpha_4 = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}, \ldots .$$

et, en général

$$\alpha_{m-1} - \alpha_m = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-m+2)}{1.2.3\ldots.(m-1)}.$$

On tire successivement, de ces équations,

$$\alpha_1 = 2^\mu - 1, \quad \alpha_2 = 2^\mu - 1 - \frac{\mu}{1}, \quad \alpha_3 = 2^\mu - 1 - \frac{\mu}{1} - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2},$$
$$\alpha_4 = 2^\mu - 1 - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},$$

et ainsi de suite: ce qui donne, pour le coëfficient d'un rang quelconque m,

$$\alpha_m = 2^\mu - 1 - \frac{\mu}{1} - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots . - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-m+2)}{1.2.3\ldots.(m-1)},$$

expression dont la partie négative n'est autre chose que la somme des m premiers termes du développement de $(1+1)^\mu$.

15.

En observant d'ailleurs que, dans ce développement, les termes placés à égale distance des extrêmes, ont la même valeur, on pourra abréger notablement le calcul des coëfficiens dont il sagit.

Comparant, en effet, l'expression ci-dessus de α_m avec le développement de $(1+1)^\mu = 2^\mu$, on trouvera, sans difficultés,

$$\alpha_m = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(\mu-m-1)]}{1.2.3\ldots(\mu-m)},$$

nouvelle expression qui est la somme des $\mu - m + 1$ derniers termes du développement de $(1+1)^\mu$ pris en allant de la droite vers la gauche. Et comme le nombre total des coëfficiens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ à calculer, est précisément μ, on voit que, pour obtenir la valeur de celui $\alpha_{\mu-m}$, qui occupe le m^e rang à partir de α_μ en allant vers la gauche, il ne s'agira que de changer $\mu - m$ en $m-1$ dans l'expression de α_m trouvée en dernier lieu; ce qui donne

$$\alpha_{\mu-m} = 1 + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

et, par suite,

$$\alpha_m + \alpha_{\mu-m} = 2^\mu.$$

Ainsi donc, ayant une fois calculé la première moitié des coëfficiens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\mu$, l'autre moitié s'en conclura, sur le champ, par une simple soustraction; le terme du milieu, quand μ est impair, ayant précisément pour valeur $\frac{1}{2}2^\mu = 2^{\mu-1}$.

Soit, pour exemple, $\mu = 6$, on aura d'abord, en partant de α_6 ou $m = 0$,

$$\alpha_6 = 1, \quad \alpha_5 = 1 + \frac{\mu}{1} = 7, \quad \alpha_4 = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} = 7 + 15 = 22;$$

puis $\alpha_3 = 2^6 - \alpha_4 = 64 - 22 = 42$, $\alpha_2 = 64 - 7 = 57$, $\alpha_1 = 64 - 1 = 63$.

16.

Calculant ainsi successivement la valeur des coëfficiens de la formule (i') ci-dessus lorsque μ devient 0, 1, 2, 3, etc., on trouvera, pour l'ordre

$$(i.)\quad\begin{cases}\mu=0,\ S=s_n,\\ \mu=1,\ S=s_n+\frac{1}{2}a_n,\\ \mu=2,\ S=s_n+\frac{1}{4}(3a_n-a_{n+1}),\\ \mu=3,\ S=s_n+\frac{1}{8}(7a_n-4a_{n+1}+a_{n+2}),\\ \mu=4,\ S=s_n+\frac{1}{16}(15a_n-11a_{n+1}+5a_{n+2}-a_{n+3}),\\ \mu=5,\ S=s_n+\frac{1}{32}(31a_n-26a_{n+1}+16a_{n+2}-6a_{n+3}+a_{n+4}),\\ \mu=6,\ S=s_n+\frac{1}{64}(63a_n-57a_{n+1}+42a_{n+2}-22a_{n+3}+7a_{n+4}-a_{n+5}),\\ \mu=7,\ S=s_n+\frac{1}{128}(127a_n-120a_{n+1}+99a_{n+2}-64a_{n+3}+29a_{n+4}-8a_{n+5}+a_{n+6}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

relations donc la loi de dérivation est manifeste, et qui pourront être poussés aussi loin qu'on le voudra, en remarquant que le coëfficient numérique d'un terme quelconque de l'une d'elles, est la somme du coëfficient de même rang dans la précédente et de celui du terme placé immediatement avant, pris tous deux abstraction faite du signe; le coëfficient du premier terme de chaque parenthèse étant d'ailleurs égal à $2^\mu-1$, et les signes étant reglés d'après ceux des termes correspondans de la série proposée (*a.*). Ainsi, par exemple, pour $\mu=7$, on trouve

$127=2^7-1$; $120=63+57$, $99=57+42$, $64=42+22$, $29=22+7$,
$8=7+1$.

Remplaçant ensuite n par $n+1$ dans ces formules, et changeant le signe des parenthèses, on obtiendra les valeurs correspondantes de S relatives à la formule (*k'.*), qui d'ailleurs pécheront par excés, celles qui précédent péchant par défaut.

17.

Quant aux expressions relatives à la formule (*m.*), elles seront les mêmes que les précédentes, à cela près que μ se trouvera augmenté d'une unité. Enfin, si l'on prend les moyennes respectives entre ces dernières expressions et celles dont il vient d'être parlé, on obtiendra les formules suivantes que nous désignerons par (*l'.*), et qui se rapportent au cas d'indécision, souvent rappelé, pour lequel n et μ ont été choisis de façon que la condition $\Delta^\mu a_n=3\Delta^\mu a_{n+1}$ se trouve satisfait rigoureusement ou approximativement:

$$(l'.)\quad\begin{cases}\mu=0,\ S=s_n+\frac{1}{4}\ 3a_n,\\ \mu=1,\ S=s_n+\frac{1}{8}\ (7a_n-\ 3a_{n+1}),\\ \mu=2,\ S=s_n+\frac{1}{16}\ (15a_n-10a_{n+1}+\ 3a_{n+2}),\\ \mu=3,\ S=s_n+\frac{1}{32}\ (31a_n-25a_{n+1}+13a_{n+2}-\ 3a_{n+3}),\\ \mu=4,\ S=s_n+\frac{1}{64}\ (63a_n-56a_{n+1}+38a_{n+2}-16a_{n+3}+3a_{n+4}),\\ \mu=5,\ S=s_n+\frac{1}{128}(127a_n-119a_{n+1}+94a_{n+2}-54a_{n+3}+19a_{n+4}-3a_{n+5}),\\ \mu=6,\ S=s_n+\frac{1}{256}(255a_n-246a_{n+1}+213a_{n+2}-148a_{n+3}+73a_{n+4}-42a_{n+5}+3a_{n+6}).\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

On remarquera, en outre, que ces relations sont soumises aux mêmes lois de dérivation que les précédentes; ce qui permet d'en prolonger le tableau indéfiniment; les signes des termes qui y entrent étant toujours ceux des termes correspondans de la série proposée.

Applications numériques aux séries peu convergentes.

18.

Soit, en premier lieu, la série très peu convergente,

$$s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\mp\frac{1}{2n+3}\pm\frac{1}{2n+5}\mp\frac{1}{2n+7}\pm\frac{1}{2n+9}\mp\text{ etc.}$$

dont il faudrait calculer près de 50000 termes pour en obtenir, à moins de 0,00001, la valeur qui représente, comme on sait, le nombre $\frac{\pi}{4}$ ou 0,785 398 163 .... égal au quart du rapport de la circonférence au diamètre. On trouvera, sans difficultés, en ne prenant (1.) que les valeurs absolues des différences,

$$\Delta^0 a_n=\frac{1}{2n+1},\quad \Delta a_n=\frac{1.2}{(2n+1)(2n+3)},\quad \Delta^2 a_n=\frac{1.2.4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)},$$

$$\Delta^3 a_n=\frac{1.2.4.6}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\ldots\ldots,\quad \Delta^\mu a_n=\frac{1.2.4\ldots\ldots 2\mu}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2\mu+1)}.$$

La loi de ces différences est manifeste, et elles vont constamment en décroissant à mesure qu'augmentent, soit le nombre n qui marque le rang du terme auquel elles se rapportent, soit le nombre μ qui marque l'ordre de chaque différence.

Prenant, pour chacun de ces ordres, le rapport de la différence du terme a_n à celle du terme suivant a_{n+1}, qui s'en déduit en y changeant simplement n en $n+1$, on aura évidemment

$$\frac{\Delta^0 a_n}{\Delta^0 a_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n+1}, \quad \frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+1}} = \frac{2n+5}{2n+1}, \quad \frac{\Delta^2 a_n}{\Delta^2 a_{n+1}} = \frac{2n+7}{2n+1}, \quad \ldots.$$

$$\ldots. \quad \frac{\Delta^\mu a_n}{\Delta^\mu a_{n+1}} = \frac{2n+2\mu+3}{2n+1}.$$

Posant enfin l'équation

$$\zeta = \frac{\Delta^\mu a_n}{\Delta^\mu a_{n+1}} = \frac{2n+2\mu+3}{2n+1} = 3, \quad \text{ou} \quad \mu - 2n = 0,$$

qui représente, sans changement de signe, celle $\varphi(\mu, x) - 3\psi(\mu, \eta) = 0$ dont il a été question au No. 12., lorsqu'on y suppose $\eta = n$, elle fera connaître l'ordre μ auquel on doit arrêter les transformations de la série proposée pour qu'ayant $\Delta^\mu a_n < 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$, de $\mu = 0$ à $\mu = 2n-1$, on ait, au contraire, $\Delta^\mu a_n > 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$ quand on passe de l'ordre $\mu = 2n$, à l'ordre $\mu = 2n+1$. Il arrive effectivement ici que la fonction $\mu - 2n$ ou $\Delta^\mu a_n - 3\,\Delta^\mu a_{n+1}$ reste constamment négative pour toutes les valeurs de μ inférieures à $2n$, et devient positve pour toutes celles qui surpassent cette même quantité.

D'ailleurs, si l'on remplace (13.) n par η dans l'équation $\mu - 2n = 0$, ce qui donne, en général, $\mu - 2\eta = 0$, il paraîtra évident que, pour tous les ordres μ inférieurs à $2n+1$, on a constamment $\Delta^\mu a_\eta < 3\,\Delta^\mu a_{\eta+1}$ de $\eta = n$ à $\eta = \infty$, tandis que, pour cet ordre lui même, auquel répond l'équation $2n+1-2\eta = 0$, l'inégalité dont il s'agit, n'est satisfaite qu'à partir de $\eta = n+1$, la valeur $\eta = n$ donnant, au contraire, $2n+1-2 > 0$ ou $\Delta^{2n+1} a_n > 3\,\Delta^{2n+1} a_{n+1}$. On est donc assuré que, pour tous les ordres μ inférieurs à $2n+1$, les valeurs données par la formule (*i.*) ou (*i'.*) sont les plus approchées possible eu égard au nombre des termes qui y entrent, tandis que l'on ne peut plus rien affirmer relativement à l'ordre $2n+1$ lui même, ainsi qu'à tous les ordres suivans. Ce sera donc le cas de se servir, pour calculer la somme S de la série proposée, de celle des formules (*l'.*) du No. 14. ci-dessus, qui se rapporte à l'ordre $\mu = 2n$.

19.

Supposant, en particulier $n = 0$, ce qui revient à prendre

$$S_n = 0, \quad a_n = 1, \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{3}, \quad a_{n+2} = \tfrac{1}{5} \text{ etc.},$$

l'équation ci-dessus donnera $\mu = 0$, et la première des formules citées

$$S = s_n + \tfrac{3}{4} a_n = 0.75;$$

valeur exacte à moins de $\frac{1}{22}$.

Supposant ensuite

$$n = 1 \quad \text{ou} \quad s_n = 1, \quad a_n = \tfrac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{5}, \quad a_{n+2} = \tfrac{1}{7},$$

on trouvera $\mu = 2$, et, par la 3me des formules (l'.),

$$S = s_n - \tfrac{1}{16}(15\, a_n - 10\, a_n + 3\, a_{n+2}) = 0{,}785714,$$

à moins de 0,00633.

Pour obtenir un pareil degré d'approximation à l'aide du procédé direct, il faudrait calculer au delà des 3000 premiers termes de la série.

Supposant enfin

$n = 2$ ou $s_n = 1 - \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = \frac{1}{7}$, $a_{n+2} = \frac{1}{9}$, $a_{n+3} = \frac{1}{11}$, $a_{n+4} = \frac{1}{13}$,

il viendra

$$\mu = 2n = 4$$

et $S = s_n + \frac{1}{64}(63\, a_n - 56\, a_{n+1} + 38\, a_{n+2} - 16\, a_{n+3} + 3\, a_{n+4}) = 0{,}7853924$;

valeur exacte, jusqu'à la 5e décimale.

20.

En recherchant directement les limites de l'erreur qui se rapporte à ce dernier nombre, on trouvera (10.)

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_{n+1} - 2b'_n) < \frac{1}{2^{\mu+1}} \Delta^{\mu} a_{n+2} = 0{,}00003667 > -\frac{1}{2^{\mu+2}} \Delta^{\mu+1} a_{n+1} = -0{,}0000261,$$

attendu qu'on a ici rigoureusement $\Delta^{\mu} a_n = 3\, \Delta^{\mu} a_{n+1}$, et d'ailleurs

$$\Delta^{\mu} a_{n+2} = \Delta^{4} a_4 = \frac{1.2.4.6.8}{9.11.13.15.17}, \qquad \Delta^{\mu+1} a_{n+1} = \Delta^{5} a_3 = \frac{1.2.4.6.8.10}{7.9.11.13.15.17}.$$

Ces limites surpassent, comme on voit, de beaucoup l'erreur effective dont la valeur, *positive*, est moindre que 0,0000058; mais, si l'on en prend la demi-somme algébrique, le résultat qu'on peut considérer comme l'expression de *l'erreur probable*, bien qu'un peu faible, donnera une valeur très approchée de l'erreur effective, ce qui tient ici à ce que la série

$$\Delta^{\mu} a_n - 3\Delta^{\mu} a_{n+1} - (\Delta^{\mu} a_{n+1} - 3\Delta^{\mu} a_{n+2}) + (\Delta^{\mu} a_{n+2} - 3\Delta^{\mu} a_{n+3}) - (\Delta^{\mu} a_{n+3} - 3\Delta^{\mu} a_{n+4}) + \text{etc.}$$

qui entre (11.) dans l'expression de cette erreur, est aussi peu convergente que la proposée, et a, en conséquence (2.), pour valeur très approchée, la quantité

$$\Delta^{\mu} a_n - 3\, \Delta^{\mu} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}(\Delta^{\mu} a_{n+1} - 3\, \Delta^{\mu} a_{n+2}),$$

qui est précisément (10.) la moyenne arithmétique des limites ci-dessus de l'erreur.

En substituant d'ailleurs, aux différences des divers ordres qui entrent dans la série dont il s'agit, les valeurs numériques qui leur appar-

tiennent, on obtiendra, pour l'expression rigoureuse de l'erreur ou du complément de la valeur de S qui nous occupe,

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(b_{n+1}-2b'_n) =$$

$$24\left(\frac{2}{9.11.13.15.17.19}-\frac{3}{11.13.15.17.19.21}+\frac{4}{13.15.17.19.21.23}-\frac{5}{15.17.19.21.23.25}+\text{etc.}\right).$$

série, en effet, très peu convergente, et qu'on pourrait, à son tour, traiter comme la proposée, mais qu'il nous suffit ici d'avoir signalée.

En applicant sa méthode au cas qui nous occupe, *Euler* *) est parvenu à la transformée indéfinie

$$S = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}+\text{etc.}\right),$$

qui est donnée par la formule (*i.*) appliquée au 1er terme de la série proposée, et dont il faudrait calculer au moins les 14 premiers termes pour obtenir un degré d'approximation égal à celui que comporte la valeur 0,785924 trouvée en dernier lieu.

21.

On arrive à des résultats analogues en considérant la série

$$S = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\ldots\ldots \pm\frac{1}{n+1}\mp\frac{1}{n+2}\pm\frac{1}{n+3}\mp\text{etc.}$$

Qui représente le logarithme népérien de 2, et à laquelle *Euler* à également appliqué sa formule de transformation aux endroits cités. On trouve, en effet,

$$\frac{\Delta^\mu a_n}{\Delta^\mu a_{n+1}} = \frac{n+\mu+2}{n+1} = 1+\frac{\mu-1}{n+1},$$

rapport qui converge sans cesse vers l'unité à mesure que n augmente, et qui devient précisement égal à 3 quand on a

$$\mu = 2n+1.$$

Prenant, par exemple,

$n=2$ ou $s_n = 1-\frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}$, $a_{n+2} = \frac{1}{5}$, $a_{n+3} = \frac{1}{6}$, etc., il viendra $\mu = 5$, et par la 6e des formules (l'.) du No. 17.,

$$S = s_n+\tfrac{1}{256}(255\,a_n-246\,a_{n+1}+213\,a_{n+2}-148\,a_{n+3}+73\,a_{n+4}-22\,a_{n+5}+3\,a_{n+6})$$
$$= 0{,}69314546$$

valeur exacte à moins de 0,000002, et qu'on n'obtiendrait, par le procédé direct, qu'en calculant au delà des 558000 premiers termes de la série proposée.

---

*) *Institutiones calculi differentialis*, page 237. *Traité de calcul differentiel et intégral* de Mr. *Lacroix*, Tome III. page 349.

22.

Soit enfin la série

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.5.5.7}{2.4.6.8} \ldots .$$

$$\ldots . \pm \frac{1.3.5 \ldots . (2n-1)}{2.4.6 \ldots . 2n} \mp \frac{1.3.5 \ldots . (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \ldots . 2n(2n+2)} + \text{etc.}$$

qui représente, comme on sait, le développement de $(1+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067$. **En posant, pour abréger,**

$$\frac{1.3.5 \ldots . (2n-1)}{2.4.6 \ldots . 2n} = k,$$

on trouvera, sans difficultés,

$$\Delta^{\mu} a_n = k . \frac{1.3.5 \ldots . (2\mu-1)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6) \ldots . (2n+2\mu)},$$

$$\Delta^{\mu} a_{n+1} = k . \frac{1.3.5 \ldots . (2\mu-1)(2\mu+1)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6) \ldots . (2n+2\mu)(2n+2\mu+2)},$$

et, par suite (11.),

$$\zeta = \frac{\Delta^{\mu} a_n}{\Delta^{\mu} a_{n+1}} = \frac{2n+2\mu+2}{2n+1}.$$

Ce rapport devient égal à 3 (12.), quand

$$2n+2\mu+2-3(2n+1) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mu-4n-1 = 0;$$

ce qui ne peut avoir lieu rigoureusement pour aucun des termes ni pour aucune des différences concernant la série proposée.

Supposant, par exemple,

$$n = 1 \text{ ou } s_n = 1, \qquad a_n = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1.3}{2.4}, \qquad a_{n+2} = \frac{1.3.5}{2.4.6}, \ldots .$$

elle donnera $\mu = 2 + \frac{1}{2}$. **Or, en prenant** $\mu = 2$, **on trouve** $2\mu - 4n - 1 < 0$, **et par conséquent** $\Delta^{\mu} a_n < 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1}$ **de** $n = 1$ **à** $n = \infty$; **tandis que, si l'on fait** $\mu = 3$, **on obtient** $\Delta^{\mu} a_n > 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1}$ **pour** $n = 1$, **puis** $\Delta^{\mu} a_n < 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1}$ **depuis** $n = 2$ **jusqu'a** $n = \infty$; **ce qui prouve évidemment (13.) qu'on doit s'arrêter aux transformées du 3me ordre, et se servir de celle des formules (*l'.*), qui s'y rapporte.**

On trouvera ainsi, en ce rappelant que $s_n = 1$, $a_n = \frac{1}{2}$ **etc.,**

$$S = s_n - \tfrac{1}{3\,2}(31\,a_n - 25\,a_{n+1} + 13\,a_{n+2} - 3\,a_{n+3}) = 0{,}70728,$$

valeur trop forte, et qui ne diffère pas de 0,0002 de la véritable, comme il serait aisé de le constater, à *priori*, en calculant les limites de l'erreur avec un degré d'approximation convenable.

Ce calcul ne laissant pas que d'être pénible, dans le cas actuel où la relation $\Delta^{\mu} a_n = 3\,\Delta^{\mu} a_{n+1}$ **n'est point exactement satisfaite, il sera pré-**

férable de calculer, selon la remarque du No. 11., directement deux premières valeurs approchées de S, par les formules (i'.) et (k'.) des No. 15. et 16., lesquelles deviennent ici, en ayant égard aux signes des termes et attendu que $\mu = 2$,

$$S = s_n - \tfrac{1}{8}(7a_n - 4a_{n+1} + a_{n+2}) = 0{,}7109375,$$
$$S = s_n - a_n + \tfrac{1}{8}(7a_{n+1} - 4a_{n+2} + a_{n+3}) = 0{,}7060547;$$

valeurs dont la 1e est trop forte et la seconde trop faible, d'après la remarque du No. 16. et si l'on observe qu'ici les signes des termes sont changés.

Prenant la moyenne arithmétique entre ces nombres, laquelle répond à la formule (k.), on obtiendra la nouvelle valeur

$$S = 0{,}7084961,$$

qui serait immédiatement donnée par la formule (m.) ou son équivalente (m', No. 17.); cette valeur est donc, à son tour, trop forte, et par conséquent la véritable valeur se trouve comprise entre elle et la plus petite des précédentes 0,7060547, dont elle ne diffère que par la 3e décimale. Prenant, en conséquence, la moyenne de ces dernières valeurs, on obtiendra finalement le nombre 0,7072754 qui s'accorde avec celui qui a été obtenu directement ci-dessus, au moyen de la 4e des formules (l'.).

D'ailleurs la marche précédente n'est guère plus laborieuse, et elle apprend que le nombre dont il s'agit ne saurait différer du véritable, d'une quantité qui surpasse la moitié 0,00122 de la différence de ceux 0,7084961, 0,7060547 dont il provient.

Transformation des mêmes séries dans le cas où le rapport numérique de chaque terme au suivant converge vers un nombre plus grand que l'unité.

23.

Les séries qui nous ont jusqu'ici occupés sont censées fort peu convergentes, de sorte que leurs termes consécutifs tendent sans cesse vers l'égalité aussi bien que ceux des suites formées par leurs différences des divers ordres; s'il en était autrement, et notamment si la discussion du No. 13. avait appris que, dans un certain ordre μ de différences, on a

$$\Delta^\mu a_\eta > 3\,\Delta^\mu a_{\eta+1}, \quad \text{ou seulement} \quad \Delta^\mu a_\eta > 2\,\Delta^\mu a_{\eta+1},$$

pour toutes les valeurs de η supérieures au nombre n qui marque le rang

du terme auquel on veut appliquer la transformation, il faudrait s'arrêter à la formule (*i.*) qui se rapporte à cet ordre, et calculer directement la valeur de la série b_n (8.) qui entre dans l'expression du reste de cette formule, en modifiant le procédé qui précède ainsi qu'il suit.

Sachant, par exemple, que, dans la série

$$S = s_n + a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + a_{n+4} - \text{etc.}$$

chacun des termes qui suivent a_n, est au moins i fois le précédent, le nombre i étant égal ou supérieur à 2, on la multipliera par i, ce qui donnera l'expression de iS; ajoutant ensuite cette expression à celle de S, et divisant par $1+i$, on mettra le résultat sous cette forme,

$$S = s_n + \frac{i}{1+i}a_n + \frac{i}{1+i}[(a_n - ia_{n+1}) - (a_{n+1} - ia_{n+2}) + (a_{n+2} - ia_{n+3}) - \text{etc.}].$$

Le nombre i, qui entre dans cette transformée évidemment identique avec la série proposée, doit être choisi le plus grand qu'il est possible sans néanmoins qu'aucune des quantités ou différences $a_n - ia_{n+1}$, $a_{n+1} - ia_{n+2}$, $a_{n+2} - ia_{n+3}$, ... puisse devenir négative; condition à laquelle on satisfera évidemment en prenant, pour ce nombre, la plus petite des valeurs du rapport de chacun des termes de la série proposée au suivant, en allant de a_n vers l'infini.

En représentant encore ici les différences, dont il s'agit, par $\Delta_i a_n$, $\Delta_i a_{n+1}$, $\Delta_i a_{n+2}$, ..., l'indice i affecté à la caracteristique Δ servant à rappeler que ce ne sont pas simplement les différences des termes consecutifs de la suite a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... qu'il s'agit de prendre, mais bien celles de chaque terme à i fois le suivant, la relation ci-dessus deviendra

$$S = s_n + \frac{i}{1+i}a_n + \frac{i}{1+i}(\Delta_i a_n - \Delta_i a_{n+1} + \Delta_i a_{n+2} - \Delta_i a_{n+3} + \text{etc.}).$$

Si les différences qui entrent dans la parenthèse de cette transformée, sont décroissantes, ce qui exige qu'on ait, depuis $\eta = n$ jusqu'à η infini, $\frac{\Delta_i a_\eta}{\Delta_i a_{\eta+1}}$; c'est-à-dire $\frac{a_\eta - ia_{\eta+1}}{a_{\eta+1} - ia_{\eta+2}} > 1$, et par conséquent

$$i < \frac{a_\eta - a_{\eta+1}}{a_{\eta+1} - a_{\eta+2}} = \frac{\Delta a_\eta}{\Delta a_{\eta+1}},$$

l'erreur qu'on risquera de commettre, en prenant

$$S = s_n + \frac{i}{1+i}a_n, \text{ sera } < \frac{1}{1+i}\Delta_i a_n = \frac{1}{1+i}(a_n - ia_{n+1});$$

mais, pour qu'elle soit moindre que celle qui se rapporte à la valeur $S = s_n + a_n$, il faudra, tout au moins (1.), qu'on ait

$$\frac{1}{1+i}\Delta_i a_n < a_{n+1}, \quad \text{ou} \quad a_n < (1+2i)a_{n+1}.$$

Cela étant, on pourra procéder à la recherche d'une valeur plus approchée encore de S, en traitant la série entre parenthèses comme nous l'avons fait de la proposée, et ainsi de suite, en débarassant, à chaque fois, s'il y a lieu, cette série des facteurs qui pourraient compliquer inutilement ses termes.

24.

Cet exposé suffit pour montrer la marche à suivre dans le cas qui nous occupe, et, au lieu de continuer à raisonner dans l'hypothèse la plus générale, nous considérerons, en particulier, les séries de la forme

$$S = s_n + a_n z^n - a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} - a_{n+3} z^{n+3} + a_{n+4} z^{n+4} - \text{etc.},$$

qui sont celles qui se présentent le plus frequemment dans les applications, et nous supposerons que, la variable z étant inférieure ou tout au plus égale à l'unité, les coëfficiens numériques a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... et leurs différences des divers ordres forment des suites naturellement décroissantes, mais d'une manière fort peu rapide; cas qui intéresse spécialement les applications.

On pourra d'ailleurs toujours préparer la série proposée et celles qui dependent de ces différences, de manière que cela ait lieu dans chaque ordre de transformées.

Supposant, par exemple, les coëfficiens a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... tels que chacun d'eux soit au moins i fois celui qui le suit immédiatement, on mettrait la série proposée sous cette forme

$$S = s_n + z_n\left(a_n - i\,a_{n+1}\frac{z}{i} + i^2 a_{n+2}\frac{z^2}{i^2} - i^3 a_{n+3}\frac{z^3}{i^3} + i^4 a_{n+4}\frac{z^4}{i^4} - \text{etc.}\right);$$

ce qui en ramenerait le calcul à celui d'une autre série dont les coëfficiens des termes consécutifs tendraient vers l'égalité, à mesure qu'on s'éloignerait du premier. Mais, comme l'introduction des facteurs i dans les séries des différences relatives aux transformées successives, compliquerait beaucoup les résultats, et qu'il serait impossible d'en rien conclure de général, nous admettrons qu'ils surpassent, du moins à partir du 1er ordre, assez peu l'unité pour qu'il devienne inutile de les prendre en considération, d'autant plus que, s'ils étaient très grands, les séries qui leur correspondent deviendraient tellement convergentes, qu'on serait dispensé de pousser plus loin les transformations.

25.

Considérant donc la série

$$(A.) \qquad S = s_1 + a_1 z - a_2 z^2 + a_3 z^3 - a_4 z^4 + a_5 z^5 - \text{etc.},$$

supposée très peu convergente pour le cas de $z - 1$, on prendra $i = \frac{1}{z}$; ce qui donnera la transformée du 1er ordre

$$(B.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{1}{1+z}(\Delta a_1 z - \Delta a_2 z^2 + \Delta a_3 z^3 - \Delta a_4 z^4 + \text{etc.}),$$

attendu (23.) qu'on a, en général, $\Delta_i a_n z^n = a_n z^n - \frac{1}{z} a_{n+1} z^{n+1} = \Delta a_n z^n$. Fesant passer en dehors de la parenthèse le terme en Δa_1, multipliant tous les termes par $\frac{1}{z}$, ajoutant la nouvelle équation, membre à membre, à la premiére, et divisant par $1 + \frac{1}{z}$*), on aura pour transformée du second ordre,

$$(C.) \quad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2}(\Delta^2 a_1 z - \Delta^2 a_2 z^2 + \Delta^2 a_3 z^3 - \Delta^2 a_4 z^4 + \text{etc.}).$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on obtiendra, en général, pour la transformée de l'ordre μ,

$$(D.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \Delta a_1 + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \Delta^2 a_1 \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 + \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu}(\Delta^\mu a_1 z - \Delta^\mu a_2 z^2 + \Delta^\mu a_3 z^3 - \text{etc.}),$$

dont la loi est manifeste.

Supposant d'ailleurs que la série, entre parenthèses, soit convergente, on aura

$$(E.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta^2 a_1 \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{z^\mu}{1+z^\mu} \Delta^{\mu+1} a_1 = S' \text{ à moins de } \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^\mu a_1.$$

Cette dernière série S', poussée à l'infini, est celle qu'*Euler* a obtenue à la p. 7., Tom. I. de ses *Institutiones calculi differentialis*, sans faire connaître, toute fois, l'expression du reste ni la limite de l'erreur commise, quand on l'arrête à un terme quelconque.

26.

Si l'on fait passer en dehors de la parenthèse de la transformée ci-dessus, le terme en $\Delta^\mu a_1$, elle deviendra

---

*) Ou, ce qui est plus simple et revient au même: multipliant par z, ajoutant, puis divisant le resultat par $1 + z$.

$$(F.). \qquad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta a_1 \ldots .$$

$$\ldots . + \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^\mu a_1 - \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu} (\Delta^\mu a_2 z^2 - \Delta^\mu a_3 z^3 + \Delta^\mu a_4 z^4 - \text{etc.});$$

nouvelle relation qui, d'après ce que nous avons vu (4. et 7.) pour le cas de $z = 1$, revient précisement à celle qu'on obtiendrait en fesant commencer la transformation au terme suivant $a_2 z^2$ de la série proposée; ce qui donnerait

$$S = s_1 + a_1 z - \frac{z^2}{1+z} \Delta_2 - \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta a_2 \ldots .$$

$$- \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_2 - \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu} (\Delta^\mu a_2 z^2 - \Delta^\mu a_3 z^3 + \Delta^\mu a_4 z^4 - \text{etc.}),$$

ou

$$s_1 + a_1 z - \frac{z^2}{1+z} a^2 - \frac{z^2}{(1+z)^2} \Delta a_2 \ldots . - \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_2 = S' + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^\mu a_1.$$

On aura donc aussi, puisque la série entre parenthèses est supposée convergente,

$$G. \qquad S = S' + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu} \Delta^\mu a_1 = S'', \text{ à moins de } \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^\mu} \Delta^\mu a_2,$$

degré d'approximation qui est supérieur à celui que comporte S'; mais on voit que, tandis que cette dernière valeur est trop faible, la précédente est trop forte, de sorte, que la véritable limite S de la série proposée est comprise entre elles.

Passant maintenant à l'ordre suivant $\mu+1$, ou, ce qui est la même chose, multipliant la seconde $(F.)$ des transformées ci-dessus, par $\frac{1}{z}$, l'ajoutant, terme à terme, à la précédente $(D.)$, puis divisant le résultat par $1 + \frac{1}{z}$, on aura

$$(H.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1+z} a_1 + \frac{z^2}{1+z^2} \Delta a_1 + \ldots . + \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 +$$

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}} \Delta^\mu a_1 + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}} (\Delta^{\mu+1} a_1 z - \Delta^{\mu+1} a_2 z^2 + \Delta^{\mu+1} a_3 z^3 - \text{etc.});$$

et par conséquent, en supposant toujours la série, entre parenthèses, convergente,

$$(I.). \quad S = S' + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}} \Delta^\mu a_1 = S''', \qquad \text{à moins de } \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu+1}} \Delta^{\mu+1} a_1.$$

27.

Cette dernière limite sera généralement plus petite que celle qui se rapporte à S' ou $(E.)$; mais, pour qu'elle le soit davantage que la

limite de S'' ou $(G.)$, et qu'il y ait par conséquent motif de préférer la valeur de S''' à celle de S'' on devra avoir, tout au moins,

$$\frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_1 < \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}}\Delta^{\mu}a_2, \quad \text{ou} \quad \Delta^{\mu+1}a_1 < (1+z)\Delta^{\mu}a_2,$$

c'est-à-dire $\Delta^{\mu}a_1 < (2+z)\Delta^{\mu}a_2$, et, tout au plus,

$$\frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_1 < \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}}(\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu}a_3 z) \quad \text{ou} \quad \Delta^{\mu+1}a_1 < (1+z)(\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu}a_3 z).$$

La même condition devra d'ailleurs être satisfaite dans tous les ordres inférieurs à μ, pour pouvoir affirmer, d'une manière absolue, que le résultat a le degré d'approximation que comporte le nombre des termes de la proposée qui y entrent. On s'arrêtera donc à l'ordre μ pour lequel $\Delta^{\mu}a_1$ égale ou surpasse, le moins qu'il est possible, la quantité $(2+z)\Delta^{\mu}a_2$; et, attendu qne les complémens ou erreurs relatives à S'' et S''' sont de signes contraires, et ne peuvent elles mêmes alors différer que très peu entre elles, on pourra prendre, pour nouvelle valeur approchée de la série $(A.)$, celle que donne la moyenne arithmétique entre S'' et S''', dont l'erreur, comme nous l'avons vu (9.), pour le cas particulier de $z=1$, devra être aussi très près de zéro.

On aura donc

$$(K.) \quad S = \frac{S''+S'''}{2} = S' + \Delta^{\mu}a_1 \frac{(2+z)}{2}\cdot\frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}} = S^{IV};$$

expression à laquelle correspond l'erreur

$$+\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^{\mu+1}a_1 - \Delta^{\mu+1}a_2 z + \Delta^{\mu+1}a_3 z^2 - \text{etc.} - (1+z)\Delta^{\mu}a_2 + (1+z)\Delta^{\mu}a_3) - (1+z)z^2\Delta^{\mu}a_4 + \text{etc.}]$$

ou

$$+\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}\{\Delta^{\mu}a_1 - (2+z)\Delta^{\mu}a_2 - [\Delta^{\mu}a_2 - (2+z)\Delta^{\mu}a_3]z + [\Delta^{\mu}a_3 - (2+z)\Delta^{\mu}a_4]z^2 - [\Delta^{\mu}a_4 - (2+z)\Delta^{\mu}a_5]z^3 + \text{etc.}\}.$$

Par conséquent si, comme on le suppose, les différences qui entrent dans cette erreur, sont décroissantes et $z \leqq 1$, cette même erreur sera (9. et 10.)

$$< \frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^{\mu+1}a_1 - (1+z)(\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu}a_3 z)]$$

$$> \frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^{\mu}a_1 - (2+z)\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu+1}a_2 z];$$

cest-à-dire

$$< \frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}} [\Delta^\mu a_1 - (2+z)\Delta^\mu a_2 + (2+z^2)\Delta^\mu a_3]$$

$$> \frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}} [\Delta^\mu a_1 - (2+z)\Delta^\mu a_2 - \Delta^{\mu+1} a_2 z] \text{ *).}$$

28.

Pour découvrir, *a priori*, l'ordre μ auquel on doit arrêter les transformations, on posera l'équation

$\Delta^\mu a_1 = (2+z)\Delta^\mu a_2$ ou, plus généralement $\Delta^\mu a_n = (2+z)\Delta^\mu a_{n+1}$, dans laquelle il n'entrera que μ, z, n et des nombres tout connus, et qu'il faudra discuter, dans chaque cas, de la même manière que nous l'avons indiqué, en général, aux No. 12. et 13. et, en particulier, aux No. 18. et suivans, dans la supposition de $z = 1$.

Considérant, par exemple, la série

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \mp \text{etc.},$$

on là ramenera à la forme de la précédente, en posant

$$\frac{\text{arc tang}\, x}{x} = S$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 - \tfrac{1}{7}x^6 \ldots \pm \frac{1}{2n+1}x^{2n} \mp \frac{1}{2n+3}x^{2n+2} \pm \frac{1}{2n+5}x^{2n+4} \mp \text{etc.},$$

et, par suite,

$$z = x^2, \quad s_1 = 1, \quad a_1 = \tfrac{1}{3}, \quad a_2 = \tfrac{1}{5}, \quad a_3 = \tfrac{1}{7} \quad \text{etc.}$$

Attendu d'ailleurs qu'on a ici, en représentant par ζ le rapport de $\Delta^\mu a_n$ à $\Delta^\mu a_{n+1}$ (18.),

$$\zeta = \frac{2\mu+2n+3}{2n+1}, \text{ il en résulte l'équation } \frac{2\mu+2n+3}{2n+1} = 2+x^2,$$

pour déterminer μ quand x et n sont donnés *a priori*.

Supposant d'abord $n = 0$, ce qui revient à opérer la transformation sur le 1er terme 1, de la série S, on obtiendra $\mu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$. Or cette relation prouve que, quel que soit x, pourvu qu'il ne surpasse pas l'unité, on doit se borner à opérer directement sur les termes de la série, sans recourir aux transformées.

---

*) La moyenne arithmétique de ces erreurs, ou l'erreur probable (19.), a, pour expression,

$$\frac{z^{\mu+2}}{2(1-z)^{\mu+1}} \{\Delta^\mu a_1 - (2+z)\Delta^\mu a_2 - \tfrac{1}{2}z[\Delta^\mu a_2 - (2+z)\Delta^\mu a_3]\}:$$

quantité qui exprime une valeur approchée (10. et 19.) de l'erreur effective lorsque la série $\Delta^\mu a_1 - (2+z)\Delta^\mu a_2 - [\Delta^\mu a_2 - (2+z)\Delta^\mu a_3]z + [\Delta^\mu a_3 - (2+z)\Delta^\mu a_4]z^2 - \text{etc.}$, est, du moins à partir de son second terme, de même nature que la proposée et convergente.

Passant donc au second terme pour lequel $n=1$, on obtiendra

$$\mu = \tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}x^2;$$

et par conséquent $\mu=2$ quand $x^2=1$, $\mu=1$ quand $x^2=\frac{1}{3}$; ce qui annonce qu'on devra pousser les transformations jusqu'au second ordre lorsque x^2 surpassera $\frac{1}{3}$, et jusqu'au premier seulement lorsque x^2 sera plus petit que $\frac{1}{3}$ ou tout au plus égal à $\frac{1}{3}$.

Si l'on suppose, en effet successivement $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, dans l'expression de ζ, puis $n=1$, on s'assurera aisément que,

1°. quand $x_2<\frac{1}{3}$, on a $\zeta<2+x^2$ pour l'ordre $\mu=0$, et $\zeta>2+x^2$ pour tous les ordres suivans;

2°. quand $x^2>\frac{1}{3}<1$, on a $\zeta<2+x^2$ pour les ordres $\mu=0$, $\mu=1$, et $\zeta>2+x^2$ pour tous les suivans.

Et, comme $n=1$ revient à supposer, abstraction faite des signes,

$$s=1,\quad a_1=\tfrac{1}{3},\quad a_2=\tfrac{1}{3},\quad a_3=\tfrac{1}{5}\quad \text{etc.},$$

ce qui donne

$$\Delta a_n=\Delta a_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{3.5},\qquad \Delta a_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{5.7},\quad \ldots.$$

$$\Delta^2 a_1=\frac{2}{3.5}-\frac{2}{5.7}=\frac{2.4}{3.5.7},\qquad \Delta^2 a_2=\frac{2.4}{5.7.9},\quad \ldots.$$

$$\Delta^3 a_1=\frac{2.4.6}{3.5.7},\qquad \Delta^3 a_2=\frac{2.4.6}{5.7.9.11},\quad \ldots.$$

on aura (25. et 27.), pour $x^2<\frac{1}{3}$, en observant que $\mu=1$, $z=x^2$ et ayant égard au changement des signes de a_1, a_2, a_3 etc.,

$$S'=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2},$$

$$S^{\text{IV}}=S'-\frac{1}{3.5}\cdot\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^2}x^4=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{3.5}\cdot\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^2}x^4;$$

de sorte qu'en prenant $S=S^{\text{IV}}$, l'erreur sera (27.)

$$<\frac{(3-4x^2+5x^4)}{(1+x^2)^3}\cdot\frac{x^6}{5.7.9}>\frac{(3-13x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{x^6}{5.7.9}.$$

Pour $x^2>\frac{1}{3}$, on trouvera pareillement, attendu que $\mu=2$,

$$S=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{2}{3.5}\cdot\frac{x^4}{(1+x^2)^2},$$

$$S^{\text{IV}}=S'-\frac{4}{3.5.7}\cdot\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^3}x^6=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{(1+x^2)}-\frac{1}{3.5}\cdot\frac{x^4}{(1+x^2)^2}-\frac{4}{3.5.7}\cdot\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^3}x^6;$$

l'erreur relative à cette dernière expression étant

$$<\frac{(n-6x^2+5x^4)}{(1+x^2)^3}\cdot\frac{4x^8}{5.7.9.11}>\frac{(11-17x^2)}{(1+x^2)^3}\cdot\frac{4x^8}{5.7.9.11}.$$

La valeur approchée de S_1 étant ainsi trouvée pour l'étendue des valeurs de x à considérer, il ne s'agira plus que de la multiplier par x pour obtenir celle de arc tang x.

29.

En terminant ce qui concerne les séries convergentes dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, nous devons présenter quelques remarques essentielles.

1°. Les considérations exposées en dernier lieu, s'appliquent aussi bien aux séries descendantes qu'aux séries ascendantes, et ne supposent pas essentiellement que les puissances de la variable soient rationnelles et entiers, mais seulement que leur rapport, en passant d'un terme quelconque au suivant, soit constant. Or c'est ce qui est évident *a priori* puisqu'on peut toujours supposer que ce rapport ou la variable z soit une fonction quelconque d'une autre variable indépendante.

30.

2°. Les mêmes considérations et toutes celles qui précèdent n'exigent pas essentiellement que les coëfficiens de la série proposée et leurs différences des divers ordres soient décroissans dans toute l'étendue de cette série, mais seulement que cette même série et celles qui constituent les restes ou complémens des diverses transformées, aient une limite ou soient convergentes; ce qui exige simplement que leurs termes aillent sans cesse (1.) en diminuant, à partir d'un certain d'entre eux; du moins ne doit-on appliquer les conséquences qui se rapportent à la limite des erreurs commises, quand on néglige les restes ou complémens dont il s'agit, qu'à la partie convergente des séries formées par ces restes; ce qui suppose qu'on fasse sortir dans chaque cas, au dehors de parenthèses qui les renferment, tous les termes divergens ou croissans pour les réunir à la partie qui doit donner la valeur approchée de la somme ou de la limite S qu'il s'agit d'obtenir.

Soit, pour exemple, la série

$$(1+x)^{-\frac{5}{2}} = 1-\frac{5}{2}x+\frac{5.7}{2.4}x^2-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^3+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}x^4-\frac{5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10}x^5+\text{etc.}$$

dont les coëfficiens numériques vont constamment en augmentant, et qui est convergente tant que x demeure au dessous de l'unité, mais dont les premiers termes commencent par diverger lorsque x surpasse $\frac{2}{5}$, et ne redeviennent décroissant qu'à partir du terme pour lequel on a $n<\frac{3x}{2(1-x)}$

ou $x<\frac{2n}{2n+3}$, n désignant le rang de ce terme qui en a $n-1$ avant lui, et $\frac{2n}{2n+3}$ exprimant le rapport de ce même terme au suivant: On formera, san sdifficultés, ce tableau des différences des coëfficiens de la série dont il s'agit, pris toujours dans l'ordre inverse,

Ordre	1er	2e	3e	4e	5e	6e termes des différences
Δ^0	$1,$	$\frac{5}{2},$	$\frac{5.7}{2.4},$	$\frac{5.7.9}{2.4.6},$	$\frac{5.7.9.11}{2.4.6.\ 8},$	$\frac{5.7.9.11.13}{2.4.6.\ 8.10},$ ....
Δ^1	$-\frac{3}{2},$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4},$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{5.7}{4.6},$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{5.7.9}{4.6.8},$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{5.7.9.11}{4.6.8.10},$	
Δ^2	$\frac{3.1}{2.4},$	$\frac{3.1}{2.4}\cdot\frac{5}{6},$	$\frac{3.1}{2.4}\cdot\frac{5.7}{6.8},$	$\frac{3\ 1}{2.4}\cdot\frac{5.7.\ 9}{6.8.10},$		
Δ^3	$\frac{3.1.1}{2.4.6},$	$\frac{3.1.1}{2.4.6}\cdot\frac{5}{8},$	$\frac{3.1.1}{2.4.6}\cdot\frac{5.7}{8.10},$			
Δ^4	$\frac{3.1.1.3}{2.4.6.8},$	$\frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}\cdot\frac{5}{10},$				
Δ^5	$\frac{3}{2}\cdot\frac{1.1.3.\ 5}{4.6.8.10},$					

La loi de ces différences est facile à saisir, et l'on voit que leurs valeurs absolues sont constamment décroissantes à partir du second ordre, soit qu'il s'agisse des différences des divers ordres, relatives à un même terme ou qui appartiennent à une même colonne verticale, soit que l'on considère celles qui, rangées sur une même ligne horizontale, appartiennent au même ordre et aux coëfficiens successifs.

D'après cela, si l'on suppose, dans la série (*A.*) du No. 25.

$$s_1=1,\quad a_1=-\tfrac{5}{2},\quad a_2=-\frac{5.7}{2.4},\quad a_3=-\frac{5.7.9}{2.4.6},\ \text{etc.},\quad z=x;$$

on trouvera, pour les transformées simples du 1er et du 2d ordres, la série proposée,

$$S=1-\frac{5}{2}\cdot\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1+x}\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{5.7}{4.6}x^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{5\ 7.9}{4.6.8}x^4+\frac{3}{2}\cdot\frac{5.7.9.11}{4.6.8.10}x^5-\text{etc.}\right),$$

$$S=1-\frac{5}{2}\cdot\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{(1+x)^2}-\frac{x^2}{(1+x)^2}\left(\frac{3.1}{2.4}x-\frac{3.1}{2.4}\cdot\frac{5}{6}x^2+\frac{3.1}{2.4}\cdot\frac{5.7}{6.8}x^3-\frac{3.1}{2.4}\cdot\frac{5.7.\ 9}{6.8.10}x^4+\text{etc.}\right).$$

La série entre parenthèses, contenue dans la dernière de ces transformées, ne devenant divergente que lorsque x surpasse l'unité, et restant convergente dans le cas contraire pour toute l'étendue de ses termes, on aura encore ici (26.)

$S = 1 - \frac{5}{2}\frac{x}{1+x} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{(3+x)^2}$ à moins de $\frac{3}{8}\frac{x^3}{(1+x)^2}$,

et sous la seule réserve que x ne surpasse pas l'unité. La même chose ayant lieu pour toutes les transformées des ordres supérieurs au 2e, on voit que ce qui a été dit aux Nos 26. et 27., leur est immédiatement applicable.

Quant à celle du 1er ordre, la série, entre parenthèses, qu'elle renferme étant du même genre que la proposée, c'est-à-dire convergente pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité, quoique susceptible de diverger dans ses premiers termes quand x surpasse $\frac{4}{5}$, on devra lui appliquer les remarques qui précèdent relativement à la valeur approchée de S qu'on en peut déduire.

Supposant, par exemple, $x = 0{,}82$, il arrivera que les termes de cette série iront en croissant jusqu'à celui qui contient x^3; on prendra donc approximativement

$S = 1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)} + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{(1+x)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{x^3}{(1+x)}$, à moins de $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{x^4}{(1+x)}$

et non pas $S = 1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)}$, censé exact à $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{x^2}{(1+x)}$ près etc.

31.

3°. Enfin lorsque la valeur de la variable, suivant les puissances de laquelle procède la série proposée est donnée *à priori*, soit exactement, soit approximativement ou entre des limites assignées, il n'est point indispensable de recourir à l'expression analytique du terme général des coëfficiens de cette série et de ses différences comme on l'a fait aux Nos 18. à 23. et 28., pour établir la discussion (12. et 13.) à l'aide de laquelle on peut connaître l'ordre auquel on doit arrêter les transformations et le terme dont on doit partir pour obtenir l'approximation la plus avantageuse qu'il est possible, eu égard au nombre des termes qui entrent dans chaque résultat. On peut, tout aussi bien, procéder, de proche en proche, par l'examen de la loi que suivent les premiers coëfficiens de la série et leurs premières différences jusqu'à l'ordre auquel on doit s'arrêter, pourvu seulement qu'on soit en état de prononcer, par un moyen quelconque et suffisamment général, sur ce que devient ultérieurement cette loi quand on suppose la série prolongée à l'infini, et notamment que les séries, qui constituent les restes de chacune des transformées auxquelles

on s'arrête, sont convergentes ou constamment décroissantes à partir de leur premier terme.

Nous choisirons, pour exemple particulier, la série

$$S=\frac{1-\omega}{\omega}a_0+\frac{(1-\omega)}{1}a_2 z''^2+\frac{(1-\omega^3)}{3}a_4 z''^4+\frac{(1-\omega^5)}{5}a_6 z''^6+\frac{(1-\omega^7)}{7}a_8 z''^8+\text{ etc.}$$

qui représente la valeur de l'intégrale elliptique

$$-z''\int_{z'}^{z''}\frac{\sqrt{(1+b'^2z^2)}}{\sqrt{(1+z^2)}}\cdot\frac{\partial z}{z^2},$$

et dans laquelle on a $\omega=\frac{z'}{z''}<1$, $b'=\sin b<1$; la loi des coëfficiens numériques a_0, a_2, a_4 .... étant d'ailleurs exprimée par la formule

$$a_{2n}=-\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots,n}(1-b'^{2n})+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{p}{1}(1-b'^{2n-2})$$
$$-\frac{p(p-1)\ldots(p-n+3)}{1.2\ldots(n-3)}\cdot\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot(1-b'^{2n-4})+\ldots.$$
$$\ldots.\mp\frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{p(p+1)\ldots(p+n-3)}{1.2\ldots(n-2)}(1-b'^4)\pm\frac{p}{1}\cdot\frac{(p+1)\ldots(p+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}(1-b'^2),$$

dans laquelle on a remplacé, pour plus de généralité, l'exposant $\frac{1}{2}$ des fonctions radicales ci-dessus par la lettre p, ce qui fait que la série proposée peut servir à calculer, par approximation, des intégrales qui appartiennent à un ordre plus élevé que les transcendantes elliptiques, dans tous les cas où z'' et b' sont au dessous de l'unité, z' représentant d'ailleurs la limite supérieure de l'intégrale.

Cette même série est une de celles que nous avons eu à considérer dans des recherches relatives au calcul du frottement dans la vis à filets triangulaires (*Litographie du cours de mécanique appliquée aux machines, de l'Ecole d'Artillerie et du Génie*, 3e Section, Note IIe). Or on peut démontrer généralement, par des considérations qui ne seraient pas ici à leur place, que, pourvu qu'on ait $p<1$, $b'<1$. 1°. Les coëfficiens a_0, a_2, a_4, ... forment une suite dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, à partir du 1er dont la valeur est $+1$, et qui, pris abstraction faite du signe, vont constamment en diminuant à mesure que n augmente; 2°. la même chose a lieu à l'égard des suites formées par les différences des divers ordres de ces mêmes coëfficiens.

Il en résulte dont que la série dont il s'agit est constamment convergente tant que z'' ne surpasse pas l'unité; mais, comme les coëfficiens a_0, a_2, a_4, ... y décroisent d'une manière extrèmement lente toutes les

fois que p n'est pas très petit, il arrive aussi que cette même série doit, quand z'' est très voisin de l'unité, devenir alors tellement peu convergente, qu'on soit obligé d'en calculer un grand nombre de termes pour obtenir la valeur qu'elle représente avec le degré d'approximation desiré.

Ce cas est précisément celui sur lequel nous sommes tombés, dans la *Note* précitée, en supposant $p=\frac{1}{2}$, $b'^2=\frac{1}{2}$, $\omega=\frac{1}{3}$ et $z''=1$, valeurs qui donnent

$$a_0=1,\quad a_2=-0{,}25,\quad a_4=0{,}21875,\quad a_6=-0{,}19531,\quad a_8=0{,}17725,$$
$$a_{10}=0{,}162964,\quad a_{12}=0{,}151565 \text{ etc.,}$$

et, par suite,

$$S=2-0{,}166667z''^2+0{,}070216z''^4-0{,}038901z''^6$$
$$+0{,}025810z''^8-0{,}0181071z''^{10}+0{,}0137786z''^{12}-\text{ etc.;}$$

série dans laquelle il faudrait, en outre, faire $z''=1$, mais que nous considérerons dans le cas où z'' aurait une valeur quelconque voisine de l'unité.

32.

Cela posé, on remarquera que le 1er terme de cette série, surpassant le triple du coëfficient 0,166667, il n'y a pas lieu de faire commencer la transformation à ce terme; et, comme on a, au contraire,

$$0{,}166667<(2+z''^2)0{,}070216,$$

pour les second et troisième termes, dès que z''^2 surpasse 0,374 ou z'', 0,61, il y a avantage à opérer sur le terme en z''^2. Considérant donc les différences des divers ordres de ce terme et des suivans, on dressera ce tableau qu'il serait inutile de pousser plus loin pour l'objet qui nous occupe,

	2^e^	3^e^	4^e^	5^e^	6^e^	7e termes
Δ^0	0,166667,	0,070216,	0,038901,	0,025310,	0,018107,	0,013779, ...
Δ^1	0,070216	0,038901	0,025310	0,018107	0,013779	
	0,096451'	0,031315'	0,013591'	0,007103'	0,004328'	....
Δ^2	0,031315	0,013591	0,007203	0,004328		
	0,065136'	0,017724'	0,006388'	0,002875'	....	
Δ^3	0,017724	0,006388	0,002875			
	0,047412'	0,011336'	0,003513'	....		

En consultant la ligne horizontale qui contient la suite des différences premières des coëfficiens de la série proposée, on voit qu'on y a $0{,}096451>3\times0{,}031315$; ce qui prouve (27.) que l'on doit arrêter au 1er ordre les transformations relatives au second terme $0{,}166667z''^2$ de la série, si mieux, on ne préfère passer au terme suivant.

On supposera donc, dans les formules de N°s 26. et 27.,

$$\mu = 1, \quad s_1 = 2, \quad a_1 = -0{,}16667, \quad \Delta a_1 = -0{,}096451,$$
$$\Delta a_2 = -0{,}031315, \ldots.$$

et remplaçant, en même tems, z par z''^2, il viendra

$$S = S^{\text{iv}} = s_1 + a_1 \frac{z}{1+z} + \Delta a_1 \frac{(2+z)}{2} \cdot \frac{z^2}{(1+z)^2}$$
$$= 2 - 0{,}166667 \frac{z''^2}{1+z''^2} - 0{,}096451 \frac{(2+z''^2)}{2} \cdot \frac{z''^4}{(1+z''^2)^4};$$

l'erreur absolue qu'on risque de commettre étant

$$< \frac{z''^6}{2(1+z''^2)^2} [0{,}096451 - 0{,}031315\,(2+z''^2) + 0{,}013591\,(z''^2+z''^4)]$$
$$> \frac{z''^6}{2(1+z''^2)^2} [0{,}096451 - 0{,}031315\,(2+z''^2) - 0{,}017724 z''^2].$$

Supposant, en particulier, $z'' = 1$, on trouvera $S = 1{,}8805$, avec une erreur absolue

$$< 0{,}003711 > -0{,}003152$$

c'est-à-dire moindre que 0,003711 si l'erreur vraie est positive, et moindre que 0,003152 si elle est négative; ce qui a lieu dans le cas actuel; mais, en réalité, l'erreur absolue est au dessous de 0,001.

33.

Si l'on veut obtenir une valeur plus approchée encore de S, il faudra passer à la seconde colonne verticale du tableau, qui contient les différences du coëfficient 0,070216 du 3e terme de la série proposée, et descendre, dans cette colonne, jusqu'à ce qu'on arrive à une différence qui cesse d'être inférieure à $2+z''^2$ fois celle du même ordre, de la colonne suivante ou du 4e terme de la série proposée, et cela pour toute l'étendue des valeurs particulières de z'' que l'on veut considérer. Par exemple, on trouvera que cela a lieu, pour la différence première, dès qu'on a $0{,}031315 \gtrless 0{,}013591\,(2+z''^2)$, ou $z''^2 \lesseqgtr 0{,}3041$; pour la différence 2de; dès qu'on a $0{,}017724 \gtrless 0{,}006388$, ou $z''^2 \lesseqgtr 0{,}7746$; pour la différence 3e, dès que z''^2 est plus petit que 1,12686, ce qui arrive toujours par hypothèse.

D'après cela, on voit qu'en particulier, si z''^2 doit démeurer compris entre 0,7746 et 1, ou z'' entre 0,88 et l'unité, on devra arrêter au 3e ordre, les transformations relatives au terme $+0{,}070216 z''^4$ qui nous occupe. On fera donc (26. et 27.)

$$\mu = 3, \quad s_1 = 2 - 0{,}166667 z''^2, \quad a_1 = 0{,}070216 z''^2, \quad \Delta a_1 = 0{,}031315 z''^2,$$
$$\Delta^2 a_1 = 0{,}017724 z''^2, \ldots.,$$

et enfin $z = z''^{/2}$; ce qui donne

$$S' = 2 - 0{,}16667\, z''^{/2} + 0{,}070216\, z''^{/2} \frac{z''^{/2}}{1+z''^{/2}} + 0{,}031315\, z''^{/2} \frac{z''^{/4}}{(1+z''^{/2})^2} + 0{,}017724\, z''^{/2} \frac{z''^{/6}}{(1+z''^{/2})^3},$$

$$S = S^{IV} = S' + 0{,}011336\, z''^{/2} \frac{(2+z''^{/2})}{2} \cdot \frac{z''^{/8}}{(1+z''^{/2})^4}.$$

Quant aux limites de l'erreur, comme elles dépendent (27.) des différences qui ne se trouvent pas inscrites au tableau, on pourra se dispenser (11.) de les apprécier directement en calculant séparément les valeurs de

$$S'' = S' + 0{,}011336\, z''^{/2} \frac{z''^{/8}}{(1+z''^{/2})^3} \qquad S''' = S' + 0{,}011336\, z''^{/2} \frac{z''^{/8}}{(1+z''^{/2})^4},$$

dont la demi-somme constitue la valeur de S^{IV}, et dont la demi-différence absolue

$$\pm \frac{S'' - S'''}{2} = 0{,}011336 \frac{z''^{/2}}{(1+z''^{/2})^4},$$

est la limite supérieure de l'erreur commise, prise abstraction faite du signe.

Supposant, pour exemple, $z'' = 1$, on trouvera

$S = S^{IV} = 1{,}879551$ à moins de $\frac{1}{6}\, 0{,}011\,336 = 0{,}000\,708$;

mais, dans la réalité, cette valeur de S est exacte jnsqu'au 4e chiffre décimal.

Transformation des séries dont les termes sont affectés du même signe; recherche des limites de leurs restes.

34.

Les considérations qui précèdent peuvent s'appliquer, avec les modifications convenables, au calcul numérique et à la transformation générale des séries dont tous les termes, à partir d'un certain d'entre eux, ont le même signe et décroissent indéfiniment (1.) *) en allant vers l'infini, pourvu que le rapport de chaque terme au suivant, dans cette partie décroissante de la série n'ait pas pour limite precisément l'unité, ou converge vers un nombre >1. Il ne s'agit, en effet, que de changer le signe du nombre i (23. et suiv.) ou des quantités $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{x}$ qui le remplacent dans les

*) L'indétermination relative au signe du dernier terme a_∞ de la série n'ayant plus lieu, il serait facile d'en tenir compte dans les transformées successives; mais, comme il ne peut avoir une valeur finie sans qu'un nombre infini de ceux qui le précèdent n'aient, dans nos hypothèses, des valeurs encore plus grandes, il en résulte qu'alors la limite cherchée de la série proposée serait elle même infinie, ce qui dispense de toute espèce de calculs.

différentes transformées, de même que ceux des termes ou des différences absolues, qui précédemment étaient affectés du signe —.

Ainsi, par exemple, ces conditions étant satisfaites dans la série

$$(A.) \qquad S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \text{etc.}$$

elle donnera lieu à la transformée de l'ordre μ,

$$(B.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1-z} a_1 - \frac{z^2}{(1-z)^2} \Delta a_1 + \frac{z^3}{(1-z)^3} \Delta^2 a_1 \ldots .$$

$$\ldots . \pm \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 \mp \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu} (\Delta^\mu a_1 z + \Delta^\mu a_2 z^2 + \Delta^\mu a_3 z^3 + \text{etc.}),$$

qui, étant poussée à l'infini en négligeant la partie comprise entre parenthèses, conduit à cette nouvelle série:

$$(C.) \qquad S = a_1 + a_1 \frac{z}{1-z} - \Delta a_1 \frac{z^2}{(1-z)^2} + \Delta^2 a_1 \frac{z^3}{(1-z)^3} - \Delta_3 a_1 \frac{z^4}{(1-z)^4} + \text{etc.},$$

conforme à celle qui a été proposée par *Euler* à la p. 228. de ses *Institutions du calcul différentiel*, à cela près que les différences des coëfficiens sont ici censées prises dans l'ordre inverse. Mais, ainsi que l'a fait observer le savant auteur du *Traité de calcul différentiel et intégral* déjà cité (voy. T. III. p. 345 et 346), cette série n'est convergente, par elle même, que dans un très petit nombre de cas, lorsque les différences Δa_1, $\Delta^2 a_1$, $\Delta^3 a_1$ etc., ne décroissent pas très rapidement, et par conséquent elle ne peut que rarement être substituée avec avantage à la proposée.

35.

Pour montrer la marche par laquelle on peut arriver directement à ces résultats, et en même tems pour apprécier les limites des erreurs auxquelles ils donnent lieu quand on s'arrête à un ordre de différences quelconque, ce qui fera connaître, en même tems, les conditions sous lesquelles il est avantageux de substituer la transformée à la série proposée, nous considérerons en général la série indéfiniment decroissante

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \text{etc.}$$

et, nommant i un nombre plus grand que l'unité, tel que chaque terme soit au moins i fois le suivant pour toute l'étendue de la série qu'on se propose de soumettre à la transformation, on donnera à cette série la forme

$$S = s_n + \left(a'_n + \frac{1}{i} a'_{n+1} + \frac{1}{i^2} a'_{n+2} + \frac{1}{i^3} a'_{n+3} + \frac{1}{i^4} a'_{n+4} + \text{etc.}\right),$$

pour laquelle

$$a'_n = a_n, \qquad a'_{n+1} = i a_{n+1}, \qquad a'_{n+2} = i^2 a_{n+2}, \text{ etc.};$$

multipliant ensuite tous ses termes par i, on aura

$$Si = is_n + ia'_n + \left(a'_{n+1} + \frac{1}{i}a'_{n+2} + \frac{1}{i^2}a'_{n+3} + \frac{1}{i^3}a'_{n+4} + \text{etc.}\right);$$

retranchant enfin de la précédente et divisant par $1-i=-(i-1)$, il viendra la transformée du 1er ordre

$$S = s_n + \frac{i}{i-1}a'_n - \frac{1}{i-1}\left(\Delta a'_n + \frac{1}{i}\Delta a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta a'_{n+2} + \frac{1}{i^3}\Delta a'_{n+3} + \text{etc.}\right).$$

Passant en dehors de la parenthèse le terme $\Delta a'_n$, multipliant par i, retranchant ensuite le résultat de la précédente, puis divisant de nouveau par $1-i$, on obtiendra la transformée du second ordre

$$S = s_n + \frac{i}{i-1}a'_n - \frac{i}{(i-1)^2}\Delta a'_n + \frac{1}{(i-1)^2}\left(\Delta^2 a'_n + \frac{1}{i}\Delta^2 a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta^2 a'_{n+2} + \text{etc.}\right).$$

Continuant le même procédé, on arrivera successivement aux transformées des 3e, 4ème ordres, et finalement à la transformée de l'ordre général μ,

$$S = s_n + ia'_n\frac{1}{i-1} - i\Delta a'_n\frac{1}{(i-1)^2} + i\Delta^2 a'_n\frac{1}{(i-1)^2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm i\Delta^{\mu-1}a'_n\frac{1}{(i-1)^\mu} \mp \frac{1}{(i-1)^\mu}\left(\Delta^\mu a'_n + \frac{1}{i}\Delta^\mu a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta^\mu a'_{n+2} + \text{etc.}\right);$$

laquelle conduit évidemment au résultat énoncé plus haut, relativement à la série en z, pour laquelle on prendrait

$$i = \frac{1}{z}, \quad s_n = s_1, \quad a'_n = a_1 z, \quad a'_{n+1} = a_2 z, \quad a'_{n+2} = a_3 z, \ldots\ldots$$

36.

Mais, ce qu'il importe de remarquer c'est qu'en mettant la transformée du 1er ordre ci-dessus sous la forme

$$S = s_n + \frac{1}{i-1}a'_n - \frac{1}{i-1}\left(a'_n - a'_{n+1} + \frac{1}{i}a'_{n+1} - \frac{1}{i}a'_{n+2} + \frac{1}{i^2}a'_{n+2} - \frac{1}{i^2}a'_{n-3} + \text{etc.}\right),$$

la série comprise dans la parenthèse, ou son équivalente

$$a_n - ia_{n+1} + a_{n+1} - ia_{n+2} + a_{n+2} - ia_{n+3} + a_{n+3} - \text{etc.},$$

est necessairement convergente (1.), puisque, par hypothèse, $i>1$ est un nombre qui ne surpasse aucun des rapports $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}}$ .... censés eux mêmes décroissans. Il en résulte, en effet, que la somme de cette série se trouve comprise (1.) entre a_n et $a_n - ia_{n+1}$, ou a'_n et $a'_n - a'_{n+1} = \Delta a'_n$, de sorte qu'en prenant

$$S = s_n + \frac{i}{i-1}a'_n, \text{ l'erreur absolue est } < \frac{1}{i-1}a'_n > \frac{1}{i-1}\Delta a'_n.$$

Et comme, en fesant passer en dehors de la parenthèse le terme a'_n, la transformée qui nous occupe devient

$$S = s_n + a'_n + \frac{1}{i-1}\left(a'_{n+1} - \frac{1}{i}a'_{n+1} + \frac{1}{i}a'_{n+1} - \frac{1}{i^2}a'_{n+2} + \frac{1}{i^2}a'_{n+3} - \text{etc.}\right),$$

on voit également qu'en prenant

$S = s_n + a'_n$, l'erreur absolue est $< \frac{1}{i-1}a'_{n+1} > \frac{1}{i-1}\left(a'_{n+1} - \frac{1}{i}a'_{n+1}\right) = \frac{1}{i}a'_{n+1}$;

résultat qui démontre, en général, que, dans une série décroissante

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \text{etc.},$$

et dont i serait la plus petite des valeurs du rapport de chaque terme au suivant, considéré depuis a_n jusqu'à a_∞, on a

$$S = s_n + a_n, \quad \text{avec une erreur absolue} < \frac{i}{i-1}a_{n+1} > a_{n+1};$$

ce qui démontre qu'une *pareille série aura toujours une somme finie si, ses termes allant constamment en diminuant de façon à devenir nuls pour* $n = \infty$, *le nombre* i *surpasse l'unité d'une quantité qui soit elle même finie.*

37.

En particulier, si la série proposée est de la forme

$$S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots + a_\mu z^\mu + a_{\mu+1} z^{\mu+1} + \text{etc.}$$

l'erreur commise, lorsqu'on s'arrête, dans le calcul, à un terme quelconque $a_\mu z^\mu$, est

$$< a_{\mu+1} \frac{k z^{\mu+1}}{k - z} > a_{\mu+1} z^{\mu+1},$$

en prenant ici $i = \frac{k}{2}$ et k étant la limite inférieure du rapport du coëfficient a_x d'un terme quelconque de rang x, au coefficient a_{x+1} du terme suivant, considéré depuis $x = \mu$ jusqu'à $x = \infty$.

Nous reviendrons bientôt sur cette expression des limites du reste des séries à termes décroissans et positifs; contentons nous ici d'en conclure l'indice à l'aide duquel on peut reconnaître si la transformée (*B.*) ou (*C.*) (No. 34.), supposée arrêtée à un terme quelconque, est susceptible de donner un plus grand degré d'approximation que la proposée (*A.*) supposée elle même arrêtée au terme correspondant ou de même rang.

38.

Recherchons, à cette effet, les limites du reste compris entre les grandes parenthèses de la transformée (*B.*), afin de les comparer à celles qui viennent d'être trouvées, en dernier lieu, pour le reste de la série (*A.*).

La série entre parenthèses, dont il s'agit, équivalant à la suivante

$$\Delta^{\mu-1}a_1 z - \Delta^{\mu-1}a_2 z + \Delta^{\mu-1}a_2 z^2 - \Delta^{\mu-1}a_3 z^2 + \Delta^{\mu-1}a_3 z^3 - \Delta^{\mu-1}a_4 z^3 + \text{etc.},$$

dont les termes sont nécessairement décroissans dès que les différences qui les multiplient le sont elles mêmes, ce qui est l'hypothèse admise, z étant d'ailleurs plus petit que l'unité ou tout au plus égal à l'unité, la somme de cette série se trouvera, dès lors, comprise entre les quantités $\Delta^{\mu-1} a_1 z$ et $\Delta^{\mu-1} a_1 z - \Delta^{\mu-1} a_2 z$; l'erreur absolue relative à la valeur

$$(D.) \qquad S = s_1 + \frac{z}{1-z} a_1 - \frac{z^2}{(1-z)^2} \Delta a_1 + \frac{z^3}{(1-z)^3} \Delta^2 a_1 \ldots . \pm \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1$$

sera en conséquence

$$< \frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 > \frac{z^{\mu+1}}{(1-z^\mu)} \Delta^\mu a_2;$$

Comparant ces limites à celles qui ont été trouvées ci-dessus (37.) dans l'hypothèse ou l'on prend

$$(E.) \qquad S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots . + a_\mu z^\mu,$$

on voit que, si l'on a

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 > a_{\mu+1} \frac{k z^{\mu+1}}{k-z}, \quad \text{ou} \quad \Delta^{\mu-1} a_1 > a_{\mu+1} \frac{k (1-z)^\mu}{k-z}$$

il n'y aura aucun motif de préférer, dans les calculs, à cette dernière expression de S, la précédente $(D.)$, qui contient d'ailleurs le même nombre de termes; mais qu'au contraire, si l'on a

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 < a_{\mu+1} z^{\mu+1} \frac{k}{k-z} \quad \text{ou, } \textit{à fortiori}, \quad < a_{n+1} z^{\mu+1},$$

c'est-à-dire

$$\Delta^{\mu-1} a_1 < a_{\mu+1} (1-z)^\mu,$$

il sera avantageux de substituer la première $(D.)$ à la seconde $(E.)$: toutefois, à moins que la valeur de $a_{\mu+1}(1-z)^\mu$ ne surpasse notablement celle de la différence $\Delta^{\mu-1} a_1$, on fera bien de s'en tenir à la série proposée dont le calcul et la forme sont plus simples.

39.

Supposant maintenant qu'on ne fasse commencer la transformation relative à cette série, qu'au terme dont le rang ou l'indice μ est n, on trouvera, sans difficultés,

$$S = s_1 + a_1 z + a_2 z \ldots . + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z_n \frac{1}{1-z} - \Delta a_n z^{n+1} \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$+ \Delta^2 a_n z^{n+2} \frac{1}{(1-z)^3} - \ldots . \pm \Delta^{\mu-n} a_n z^\mu \frac{1}{(1-z)^{\mu-n+1}}$$

$$\mp \frac{z^\mu}{(1-z)^{\mu-n+1}} (\Delta^{\mu-n+1} a_n z + \Delta^{\mu-n+1} a_{n+1} z^2 + \Delta^{\mu-n+1} a_{n+2} z^3 + \text{etc.});$$

de sorte que, si l'on prend

$$(F.)\quad S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \frac{1}{1-z} - \Delta a_n z^{n+1} \frac{1}{(1-z)^2}$$
$$+ \Delta^2 a_n z^{n+2} \frac{1}{(1-z)^3} - \ldots \pm \Delta^{\mu-n} a_n z^{\mu} \frac{1}{(1-z)^{\mu-n+1}},$$

l'erreur absolu sera, dans les mêmes hypothèses,

$$< \frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n} a_n > \frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n+1} a_n,$$

et par conséquent, pour qu'il fût certain que cette valeur (*F.*) est plus approchée que celle (*E.*), on devrait avoir

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n} a_n < a_{\mu+1} z^{\mu+1}, \text{ c'est-à-dire } \Delta^{\mu-n} a_n < a_{\mu+1} (1-z)^{\mu-n+1}.$$

40.

En général, on pourra à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été mises en usage aux N°s 7. et suivant, régler la marche à suivre, dans les opérations, de manière à obtenir la plus grande approximation possible de l'emploi des transformées relatives aux divers ordres de différences. Mais, attendu que la transformation qui nous occupe, ne sera généralement avantageuse que lorsque les différences des coëfficiens de la série proposée, seront rapidement décroissantes, ou du moins décroitront plus rapidement que ne croissent elles mêmes les puissances, de même ordre, de la fonction $1-z$, nous n'insisterons pas davantage, et nous nous bornerons à un seul exemple relatif à la série

$$-\log(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \ldots + \frac{z^n}{n} + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{etc.}$$

qui est peu convergente lorsque z approche de l'unité.

Fesant $s_1 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... $a_n = \frac{1}{n}$, on trouvera

$$\Delta^{\mu} a_n = \frac{1.1.2\ldots.\mu}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)}, \qquad \Delta^{\mu-n} a_n = \frac{1.1.2\ldots.(\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots.[n+(\mu-n)]}.$$

La condition pour que (*F.*) soit plus approché que (*E.*), deviendra donc ici

$$\Delta^{\mu-n} a_n = \frac{1.1.2\ldots.(\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots.[n+(\mu-n)]} < a_{\mu+1}(1-z)^{\mu-n+1} = \frac{(1-z)^{\mu-n+1}}{\mu+1},$$

c'est-à-dire

$$z < 1 - \sqrt[\mu-n+1]{\left((\mu+1)\frac{1.1.2\ldots.(\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots.[n+(\mu-1)]}\right)}$$
$$= 1 - \sqrt[m]{\left((m+n)\frac{1.1.2\ldots.m-1}{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}\right)}$$

m représentant l'ordre $\mu - m + 1$ de la transformée relative au terme $a_n = \frac{1}{n}$ de la série proposée.

Supposons, en particulier,

$n=4$, $m=4$, on aura $z<1-\sqrt[4]{\left(\frac{2}{5.7}\right)}=1-0{,}489=0{,}511$,

$n=9$, $m=2$, on aura $z<1-\sqrt[2]{\left(\frac{11}{9.10}\right)}=1-0{,}346=0{,}654$.

Ces résultats suffisent pour montrer qu'il y aura, en général, peu d'avantages à appliquer la transformation qui nous occupe à la série proposée; ce à quoi d'ailleurs on devait bien s'attendre d'après la manière peu rapide dont décroissent les différences de ses coëfficiens.

En effet, pour le premier des exemples dont il s'agit, où $n=4$ et $m=4$, on aurait (38.)

$$\mathcal{S}=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\cdot\frac{1}{1-z}-\frac{z^5}{4.5}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{2.z^6}{5.6.4(1-z)^3}-\frac{2.3}{4.5.6.7}\cdot\frac{z^7}{(1-z)^4},$$

à moins de $\frac{2.3.4}{4.5.6.7.8}\cdot\frac{z^8}{(1-z)^4}$;

et, par la série proposée (37.),

$\mathcal{S}=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}$, à moins de $a_{\mu+1}\frac{k\,z^{\mu+1}}{k-z}=\frac{1}{8}\cdot\frac{z^8}{1-z}$;

μ étant ici égal à $m-n+1$ ou 7, et k, limite inférieure du rapport $\frac{a_\eta}{a_{\eta+1}}=\frac{\eta+1}{\eta}$ considéré depuis $\eta=\mu=7$ jusqu'à $\eta=\infty$, ayant pour valeur l'unité. Or en prenant précisement $z=\frac{1}{2}$, la limite de l'erreur relative à la première de ces expressions de $\mathcal{S}$, devient $\frac{1}{5.7.8}\cdot\frac{1}{2^4}$, et celle de l'erreur qui se rapporte à la seconde $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^7}$, nombre qui n'est pas le quintuple du précédent.

41.

Néanmoins comme la transformée procède par des signes alternativement positifs et négatifs toutes les fois que les différences des divers ordres de la proposée sont décroissantes, il est évident qu'il pourra y avoir de l'avantage à la substituer à celle-ci quelque peu convergente qu'elle soit, puisqu'on pourra lui appliquer les méthodes d'approximation rapportées dans la 1ère partie de ce mémoire.

Or la condition unique pour qu'elle soit convergente, c'est que ses termes diminuent indéfiniment et finissent par se réduire à 0, circonstance qui exige 1°. que l'on ait

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu+1}}\Delta^\mu a_u : \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_n=\frac{z}{(1-z)}\cdot\frac{\Delta^\mu a_\mu}{\Delta^{\mu-1}a_\mu}<1,\ \text{ou}\ \frac{z}{1-z}<\frac{\Delta^{\mu-1}a_n}{\Delta^\mu a_n},$$

a_n **représentant le terme de la série proposée auquel on veut appliquer la transformation; 2°. que l'expression**

$$\frac{z^\mu}{(1-z)^\mu}\,\Delta^{\mu-1}a_n < \left(\frac{\Delta^{\mu-1}a_n}{\Delta^\mu a_n}\right)^\mu \Delta^{\mu-1}a_n$$

soit susceptible de devenir nulle quand on y suppose $\mu=\infty$; ce qui ne se présente que dans quelques cas particuliers et assez rares, comme nous l'avons déjà fait remarquer ci-dessus.

42.

D'après cela, il serait inutile de s'étendre davantage sur les formules de transformation qui ont été exposées en dernier lieu, et je ferai seulement observer que les considérations qui nous y ont conduit, fournissent quelques autres résultats généraux relatifs aux limites des séries, et qui, s'ils ne sont pas entièrement neufs, n'ont pas, ce nous semble, attiré l'attention des géomètres autant que le mérite leur importance et leur utilité.

Soit, par exemple, la série à termes positifs

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \text{etc.}$$

Nommons M la plus grande et m la plus petite des valeurs numériques du rapport $\frac{a_\eta}{a^{\eta+1}}$ considéré depuis $\eta=n$ jusqu'à $\eta=\infty$. Multipliant, tour à tour, la série proposée par chacun de ces nombres; retranchant cette même série du résultat et divisant par $M-1$ et $m-1$ respectivement, il viendra les transformées

$$S = s_n + \frac{m}{m-1}a_n - \frac{1}{m-1}(a_n - m\,a_{n+1} + a_{n+1} - m\,a_{n+2} + a_{n+2} - m\,a_{n+3} + \text{etc.}),$$

$$S = s_n + \frac{M}{M-1}a_n - \frac{1}{M-1}(a_n - M\,a_{n+1} + a_{n+1} - M\,a_{n+2} + a_{n+2} - M\,a_{n+3} + \text{etc.}),$$

qui sont identiques avec la proposée si l'on peut négliger les termes qui répondent à η infini.

Or la quantité comprise entre les parenthèses de chacun de ces nouvelles expressions de S, est essentiellement positive pour la première et négative pour la seconde; donc on aura

$$S < s_n + \frac{m}{m-1}a_n \quad \text{et} \quad S > s_n + \frac{M}{M-1}a_n,$$

de sorte que si ces limites, de S, sont très rapprochées l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, si M et m sont très peu différens, on pourra prendre

$$S = s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m-1} + \frac{M}{M-1}\right) a_n,$$

à moins de $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m-1} - \frac{M}{M-1}\right) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(M-m)}{(m-1)(M-1)} a_n$.

43.

Ces résultats supposent essentiellement, d'une part, que $a_\infty = 0$, d'une autre que m et M surpassent l'unité ou que $m-1$, $M-1$ soient positifs. Mais il est aisé de déterminer des limites de S où l'on ait égard à l'influence du terme a_∞ et du changement de signe de $m-1$ et de $M-1$.

En effet, pour tenir compte de ce terme quand il a une valeur finie, il ne s'agira que d'observer qu'étant placé à la limite de la serie, il doit entrer positivement et sans multiplicateur dans les parenthèses des transformées. D'après cela, on trouvera, sans difficultés et en raisonnant comme on le ferait sur une suite finie quelconque, 1°. en vertu de la première transformée,

$S < s_n + \frac{m}{m-1} a_n - \frac{a_\infty}{m-1}$, si $m > 1$, et $S > s_n - \frac{m}{1-m} a_n + \frac{a_\infty}{1-m}$, si $m < 1$;

2°. par la 2de transformée,

$S > s_n + \frac{M}{M-1} a_n - \frac{M_\infty}{M-1}$, si $M > 1$, et $S < s_n - \frac{M}{1-M} a_n + \frac{a_\infty}{1-M}$, si $M < 1$.

En examinant attentivement ces nouvelles expressions des limites, on s'apercevra qu'en dehors du cas où m et M surpassent à la fois l'unité, et $a_\infty = 0$, elles deviennent, en général, illusoires et n'apprennent plus rien de positif sur la convergence de la série proposée ou l'existence de la valeur numérique de la fonction génératrice qu'elle représente. Ainsi, par exemple, dans le cas des séries à termes alternativement croissans et décroissans, dont nous nous occuperons plus loin, on aura, à la fois, $m < 1$ et $M > 1$; valeurs auxquelles ne correspondent que des limites inférieures de la somme S de la série.

44.

La somme numérique d'une série *indéfiniment décroissante* et affectée de signes différens, étant nécessairement moindre que celle de la série qui aurait les mêmes termes pris positivement, il est clair, d'après ce qui précède, qu'il sera souvent possible d'en assigner une limite supérieure quelconque. Mais, pour éviter l'infini qui se présenterait dans certains cas ou pour obtenir des limites plus approchées, il conviendra de partager la somme R des termes qui suivent s_n dans la proposée, ou le

reste relatif à s_n, en deux parties dont l'une $+R_1$ essentiellement positive, et l'autre $-R_2$ essentiellement négative, puis de chercher séparément les limites qui se rapportent à leurs valeurs absolues, afin d'en conclure ensuite les limites mêmes de R. Ayant trouvé, par exemple,

$$R_1 < L' > L'', \qquad R_2 < L'_1 > L''_1,$$

on aura, *a fortiori*,

$$R = R_1 - R_2 < L' - L''_1 > L'' - L'_1, \qquad R_2 - R_1 > L''_1 - L' < L'_1 - L''$$

selon que $L' - L''_1$, $L'' - L'_1$ seront, en même tems, positifs ou négatifs.

Dans le cas particulier des séries de la forme

$$S = s_n \pm a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+2} \mp a_{n+3} \pm \text{etc.} = s_n \pm \Delta a_n \pm \Delta a_{n+2} \pm \Delta a_{n+4} + \text{etc.},$$

on se servira des résultats qui se concluent du No. 23. ou bien on procédera, comme dans le No. 41. ci-dessus, en remplaçant les soustractions par les additions, et prenant pour m et M la plus petite et la plus grande des valeurs de $\frac{\Delta a_\eta}{\Delta a_{\eta+1}}$ depuis $\eta = n$ jusqu'à $\eta = \infty$. On obtiendra, en effet, dans l'hypothèse de $\pm a_\infty = 0$, $\Delta a_\infty = 0$,

$$S \gtrless s_n \pm \frac{m}{m+1} a_n \lessgtr s_n \pm \frac{M}{M+1} a_n, \qquad S = s_n \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{m+1} - \frac{M}{M+1}\right),$$

à moins de $\frac{1}{2} \frac{(M-m)a_n}{(M+1)(m+1)}$.

Les signes supérieurs et inférieurs se correspondant respectivement.

45.

On trouvera pareillement des limites de S, en opérant directement sur la somme de différences qui suit s_n, lorsqu'il arrivera que ces différences sont toutes positives, et, en général, on pourra traiter de cette manière beaucoup de séries dont les signes changent périodiquement suivant une loi connue.

Quant aux séries composées de suites alternativement convergentes ou divergentes, c'est-à-dire croissantes ou décroissantes, il conviendra de les partager en diverses suites distinctes, dont l'une infinie et les autres finies, de manière qu'on puisse, sans difficultés, déterminer séparément leurs limites pour en conclure celles de la série proposée.

Nommant, en effet, a_n l'un des termes de la série dont la valeur absolue est un maximum par rapport à ceux qui le précèdent ou le suivent immédiatement, de sorte que, pour ce terme, on ait sensiblement $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$; on prendra, en deça et au de là de a_n, un certain nom-

bre de termes de la série proposée pour en composer une suite particulière, ascendante jusqu'à a_n puis descendante à partir de a_n, et qui soit telle que le premier $a_{n-\mu}$ de ses termes et le dernier a_{n+1}; soient sensiblement égaux entre eux et fournissent des rapports $\frac{a_{n-\mu-1}}{a_{n-\mu}}$, $\frac{a_{n+\eta-1}}{a_{n+\eta}}$ qui diffèrent sensiblement de l'unité. Cela posé si $a_{n-\mu}$ est moindre que $a_{n+\eta}$, la somme des termes de la suite finie dont il s'agit, et que nous supposons positifs, sera moindre que $(\mu+\eta)a_n$ et plus grande que $(\mu+\eta)a_{n+\mu}$. Si, au contraire, a_n était un minimum, cette même somme serait

$$>(\mu+\eta)a_n<(\mu+\eta)a_{n+\eta}.$$

Enfin les autres portions finies ou infinies de la série, limitées aux précédentes, étant constamment croissantes ou décroissantes, m et M y seront à la fois plus petits ou plus grands que l'unité, et il deviendra facile de déterminer les limites finies de leurs sommes par le procédé du No. 42., sauf dans le seul cas où le rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ deviendrait rigoureusement l'unité pour n infini.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands développemens relativement aux limites des séries; mais avant de clore ce mémoire, qui a acquis une extension considérable par suite des applications numériques dont nous l'avons accompagné, nous croyons devoir rapporter quelques considérations particulières relatives à la représentation des séries au moyen de figures géométriques, et qui mettent en évidence plusieurs de leurs propriétés générales.

Considérations géométriques sur les séries et principalement sur les limites de leurs restes.

46.

La manière que peut sembler la plus naturelle de représenter le cours d'une série, consiste à considérer comme l'ordonnée du sommet d'un certain polygone, la valeur de la somme de ses premiers termes jusqu'à celui dont le rang ou l'indice serait pris pour la valeur correspondante de l'abscisse. Ainsi l'on aurait, d'après cette définiton géométrique, x et y étant les coordonnées rectangulaires d'un sommet quelconque d'un polygone limité ou illimité, l'équation

$$y = s_0 + a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_x = s_1 + \Sigma_0^x a_x, \quad \text{ou } \Delta y = a_x \Delta x,$$

dans laquelle on peut, pour plus de généralité et lorsqu'il s'agit de représenter analytiquement un polygone de figure quelconque, supposer à Δx des valeurs variables quand on passe du sommet dont l'abscisse est x, au sommet consécutif dont l'abscisse est $x+\Delta x$, mais que, dans le cas le plus ordinaire des séries, on doit regarder comme constante et égale à l'unité. Il est évident en effet, que l'une ou l'autre des équations qui précèdent sont aptes à redonner tous les sommets, ou, ce qui revient au même, à représenter tout le cours d'un polygone quelconque, dès l'instant où a_x est donné en fonction de x et de constantes, et cela de la même maniére que l'on représente le cours entier d'une courbe plane, par l'équation $y=f(x)$ ou son équivalente $dy=f'(x)dx$.

Nous ne nous étendrons pas sur les conséquences que l'on pourrait déduire de cet aperçu, attendu que la définition qui précède fait dépendre les propriétés des séries de celles de polygones dont le tracé dépend lui même de la sommation des suites au moyen du calcul des différences finies; nous passeront, en conséquence, à un autre mode de représentation géométrique des séries, qui n'a pas cet inconvenient, du moins à certains égards.

47.

Supposons, en effet, que l'on considère (Fig. 1. Tab. I.) les valeurs des termes successifs de la série quelconque

$$x = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_y + a_{y+1} + a_{y+2} + \text{etc.},$$

prolongée indéfiniment, comme les ordonnées des différens sommets d'un polygone $\alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \ldots . \alpha_\infty$, ayant respectivement pour abscisses, les sommes des termes de la série supposée arretée aux termes dont s'agit, en convenant, pour la simplicité des considérations géométriques, d'attribuer le même signe ou la même direction, au dessus de l'axe des abscisses, aux ordonnées qui peuvent résulter de termes quelconques positifs ou négatifs. On voit qu'il deviendra très facile de suivre, sur la figure, la marche de la série ou la loi de progression de ses termes successifs et des sommes qui leur correspondent; on sera même en état, dans beaucoup de cas, de prévoir, à l'avance, si la somme de la série entière est susceptible d'une limite finie ou infinie: car, par exemple, si le polygone qui représente cette série, finit par conserver une forme toujours *concave* par rapport à l'axe des abscisses, comme cela a lieu notamment dans la figure à partir du sommet α'_2 ou du côté $\alpha'_3 \alpha'_4$, il est certain que la somme, x, de la

série, aura une valeur finie qui sera toujours surpassée par la valeur de l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec le prolongement de l'un quelconque des côtés $\alpha'_2\alpha'_3 . \alpha'_3\alpha'_4$ .... appartenant à la partie dont il s'agit. Or rien de plus facile que de s'assurer directement qu'une portion donnée de polygone est constamment concave vers l'axe des x.

En effet, il ne s'agit que de prouver que l'angle d'inclinaison de ses côtés consécutifs, en marchant de la gauche vers la droite, sur l'axe dont il s'agit, va constamment en croissant de manière à conserver une valeur finie pour le côté le plus avancé vers l'infini; bien entendu d'ailleurs que les accroissemens correspondans des abscisses seront positifs et décroissans.

48.

La tangente de cet angle, pour le côté quelconque $\alpha'_n\alpha'_{n+1}$ (Fig. 2.), est évidemment mesurée par l'expression

$$\text{tang}\,\omega = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1,$$

en représentant cet angle par ω, et considérant comme positifs les angles aigus formés par le prolongement de chaque côté avec la gauche de l'axe des abscisses. Si donc cette fonction conserve constamment le même signe de a_n à a_∞, en ne considérant que les valeurs absolues de a_n et a_{n+1}; si, de plus, elle croît indéfiniment avec n, il est clair que la portion de polygone qui lui correspond sera concave vers l'axe des abscisses, et que la série proposée sera susceptible d'une limite finie qui sera comprise entre l'abscisse $0a_n$ qui répond à l'ordonnée $\alpha'_n a_n$, et celle du point k intersection de l'axe $0x$ avec le prolongement du côté $\alpha'_n\alpha'_{n+1}$.

Cela posé on remarquera que le triangle $\alpha'_n k a_n$ donne

$$a_n k = \frac{a_n}{\text{tang}\,\omega} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}};$$

de sorte que si l'on fait

$$s_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n, \qquad R = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \text{etc.}$$

et qu'on représente, en outre, comme dans tout le cours de ce Mémoire, par S la limite vers laquelle converge la somme entière de la série proposée, on aura, pour le cas particulier qui nous occupe,

$$S < s_{n+1} + \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > s_{n+1} + a_{n+1} \quad \text{ou} \quad R < \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > a_{n+1}.$$

Mais il est facile d'obtenir une limite inférieure plus approchée de S, en considérant qu'attendu que la portion de polygone, qui répond à R, est

supposée constamment concave vers l'axe des abscisses ou convexe en dehors, la parallèle $\alpha'_{+1n}\,k'$, menée par le sommet a'_{n+1} au dernier côté qui répond à α_∞ ou à n infini, doit nécessairement rencontrer l'axe Ok en un point k' situé en déçà de α_∞, et dont la position est déterminée par la relation

$$\alpha_{n+1}\,k' = \frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega'},$$

ω' représentant l'angle aigu formé par l'axe des abscisses avec le dernier des côtés du polygone, ou $\text{tang}\,\omega'$ la valeur de $\text{tang}\,\omega$ quand on y suppose n infini.

On aura donc, pour déterminer les limites du reste R de le série,

$$R < \frac{a_n}{\text{tang}\,\omega} > \frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega'} + a_{n+1},$$

avec la seule condition que, dans l'étendue de R, tous les termes soient positifs et indéfiniment décroissans en même tems que le rapport de chacun d'eux au précédent.

49.

Prenant, pour exemple, la série

$$a^x = 1 + la\frac{x}{1} + la^2\frac{x^2}{1,2} + la^3\frac{x^3}{1.2.3} \ldots + la^n\frac{x^n}{1.2\ldots n} + la^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + la^{n+2}\frac{x^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \text{etc.}$$

qui satisfait évidemment aux conditions ci-dessus dès que $n+1 > x\,la$, on trouvera

$$\text{tang}\,\omega = \frac{n+1}{x\,la} - 1, \quad \text{tang}\,\omega' = \infty, \quad R < \frac{la^{n+1}x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1-x\,la)} > \frac{la^{n+1}x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)}.$$

En appliquant, à ce même exemple, le théorème de *Lagrange*, concernant le reste de la série de *Maclaurin*, on trouve

$$R < la^{n+1}\frac{a^x x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)} > \frac{la^{n+1}x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)},$$

et il est évident que ces limites, qui ont l'inconvénient de dépendre de la fonction dont il s'agit de calculer le développement, seront, en général, moins approchées que les précédentes, pour des valeurs de n surpassant notablement $x\,la - 1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier pour le cas particulier de $x = 1$, $a = e = 2{,}71828$ ou $la = 1$.

50.

Considérons maintenant le cas où le polygone $a'_n\,\alpha'_{n+1}\ldots\alpha_x$ (Fig. 3.), appartenant à la portion de la série proposée comprise depuis a_n jusqu'à

a_∞ est constamment convexe du côté de l'axe des abscisses, on aura encore

$$\text{tang}\,\omega = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$$

avec la condition que, de a_n à a_∞, ou de $n = n$ à $n = \infty$, 1°. la valeur absolue de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ reste constamment au dessus de l'unité; 2°. qu'elle aille sans cesse en décroissant au lieu de croître comme dans le cas précédent. Or il est facile de voir que, pour ce cas, les limites ci-dessus du reste R de la série, supposée arrêtée au terme a_n, devront être renversées, c'est-à-dire qu'on aura

$$a_n a_\infty > a_n k < a_n k'; \quad \text{c'est-à-dire} \quad R > \frac{a_n}{\text{tang}\,\omega} < \frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega} + a_{n+1},$$

$\text{tang}\,\omega'$ représentant toujours la valeur de $\text{tang}\,\omega$ relative à $n = \infty$, et a_∞ étant supposé nul, comme dans le cas précédent. Quant au cas où la dernière ordonnée a_∞ du polygone aurait une valeur finie quelconque que surpasseraient toutes les autres, il parait évident, *à priori*, que $0a_\infty = S$ serait infini, $\text{tang}\,\omega' = 0$, et $\frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega'} = \frac{1}{0}$.

51.

Considérons enfin le cas où le polygone $a'_n\, a'_{n+1} \ldots a_\infty$ (Fig. 4.) se rapprochant continuellement de l'axe des x, contiendrait néanmoins une ou plusieurs inflexions telle que celle qui a lieu au sommet a'_{n+3} par exemple, lequel partage ici le polygone en deux parties dont l'une est convexe du côté de l'axe des abscisses et l'autre concave du même côté, dans toutes ses parties; ce qui signifie simplement que le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$, toujours > 1, ayant commencé par décroître depuis $x = n$ jusqu'à $x = n+3$, a fini par recroître, et cela continuellement, à partir de cette dernière valeur; si nous considérons, dis-je, les choses dans cette hypothèse, il faudra supposer le reste R de la série proposée, ou le polygone $a'_n\, a'_{n+1} \ldots a_\infty$ qui lui correspond, partagé en autant de portions distinctes qu'il y a de termes pour lesquels le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$ atteint une valeur numérique maximum ou minimum, puis rechercher séparément les limites des sommes comprises entre les termes dont il s'agit, et ajouter enfin entre elles les limites de même espèce, pour en composer les limites totales.

Dans le cas de la Fig. 4., par exemple, qui n'a qu'un seul point d'inflexion en a'_{n+3}, répondant au côté $a'_{n+2}\, a'_{n+3}$, qui forme le plus petit

angle avec l'axe $0x$, on supposera menée la parallèle $b\alpha'_{n+3}$ à cet axe, et l'on rapportera la portion de polygone $\alpha'_n \alpha_{n+1} \ldots \alpha'_{n+3}$ à cette parallèle comme nouvel axe des abscisses; ce qui revient à diminuer de $a_{n+3}\alpha'_{n+3}$ ou de a_{n+3} toutes les ordonnées correspondantes. On aura donc, d'après ce qui précède, en nommant R_1 la valeur de $b\alpha'_{n+3} = a_n a_{n+3}$, et R_2 celle de $a_{n+3}a_\infty$,

$$R_1 < \frac{a_{n+1}-a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'_1} + a_{n+1} > \frac{a_n - a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega_1}, \quad R_2 + a_{n+3} < \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'_1} > \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'} + a_{n+3},$$

dans lesquelles $\operatorname{tang}\omega'_1$, $\operatorname{tang}\omega_1$, $\operatorname{tang}\omega'$ sont les valeurs respectives de

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a_x}{a_{x+1}} - 1$$

correspondantes respectivement à $x = n+2$, $x = n$ et $x = \infty$.

On aura donc aussi

$$R = R_1 + R_2 < \frac{a_{n+1}}{\operatorname{tang}\omega'_1} + a_{n+1} - a_{n+3} > \frac{a_n - a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega_1} + \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'}.$$

52.

Mais on peut obtenir des expressions plus simples, quoique moins approchées, des limites du reste R, en considérant que, puisque le côté $\alpha'_{n+2}\alpha'_{n+3}$ est, par hypothèse, celui qui fait le plus petit angle l'axe des x, la parallèle qui lui est menée du sommet α'_n, laissera nécessairement en dessous tout le polygone qui représente R; de sorte qu'on aura nécessairement aussi

$$R < \frac{a_n}{\operatorname{tang}\omega'_1}.$$

Et si d'ailleurs le dernier côté, qui répond à n infini, est celui qui forme le plus grand angle avec le même axe, il est clair que la parallèle qui lui est menée par le sommet a_n, laissera en dehors ce même polygone; de sorte qu'on aura

$$R > \frac{a_n}{\operatorname{tang}\omega'}.$$

En général, on voit que, quel que soit le nombre des inflexions du polygone, pourvu que ses ordonnées a_x aillent sans cesse en diminuant, on aura

$$R < \frac{a_n}{k-1} > \frac{a_n}{I-1};$$

I étant la plus grande et k la plus petite des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$ depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$.

53.

Il est aisé d'apercevoir d'ailleurs l'analogie de cette règle avec celles qui ont été obtenues par la considération des moyennes, au No. 42., et l'on arriverait à des rapprochemens semblables (45.) pour le cas des séries, à termes positifs, composées de suites alternativement croissantes et décroissantes, qui seraient ici représentées par des polygones ondulés sécartant et s'approchant alternativement de l'axe des abscisses.

Quant au cas où les termes de la série proposée sont en partie positifs et en partie négatifs, nous n'ajouterons rien de plus à ce qui a été dit, en général, au No. 44., et nous ferons seulement remarquer que les séries dont il s'agit donneraient lieu, d'après nos conventions, à des polygones en *zigs-zags* ayant la forme représentée dans la (Fig. 5.), et dont il serait facile d'établir plusieurs des propriétés générales au moyen de considérations purement géométriques.

54.

En terminant ici ce que nous nous proposions de dire touchant le calcul numérique des séries, nous devons insister sur la difficulté, qu'offre la détermination d'une limite finie et approchée de leur somme, toutes les fois que leurs derniers termes, vers la droite, se trouvant dans le cas (50.) représenté pas la (Fig. 3.), il arrive que l'élément ou côté du polygone $a'_n a'_{n+1} \ldots\ldots a_\infty$, qui repond à n infini, se confond avec l'axe des abscisses, de sorte qu'on a rigoureusement $\text{tang}\,\omega' = 0$, et partant, $a'_n k'$ ou $\frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega'} = \infty$.

En effet, ce cas est complètement douteux, attendu qu'il peut aussi bien arriver que la valeur représentée par la série proposée soit finie qu'infinie, selon que la portion de polygone considéré osculera l'axe des abscisses en un point a_∞, plus ou moins éloigné de l'origine, ou lui sera, en quelque sorte, *asymptote* à distance finie ou infinie.

55.

Pour donner un exemple d'une série dont la limite supérieure du reste se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, sans que, pour cela, la valeur qu'elle représente soit elle même infinie, nous considérerons le développement

$$(1-z)^m = 1 - \frac{mz}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n + \text{etc.},$$

dans la supposition de m fractionnaire et positif.

Il est évident que les termes de ce développément seront alternativement positifs et négatifs tant que l'on aura $m > n-1$ ou $n < m+1$, et que, passé le terme pour lequel cette circonstance arrive, ils redeviendront tous de même signe. Supposant donc que le terme en z^n, appartienne à la suite de ceux qui conservent le même signe, on aura, en fesant abstraction de ce signe,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{(n-m)z}, \qquad \text{tang}\,\omega = \frac{n+1}{(n-m)z} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1+m}{(n-m)z} - 1;$$

ce qui montre que le rapport de a_n à a_{n+1} sera toujours plus grand que l'unité et par conséquent la série décroissante depuis $n > m$ jusqu'à $n = \infty$, si seulement z est lui même au dessous de $\frac{n+1}{n-m}$. On voit, de plus, que ce rapport, et par conséquent tang ω, iront sans cesse en décroissant jusqu'à la valeur de $n = \infty$, pour laquelle ils se réduiront respectivement aux quantités $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z} - 1$.

On aura donc ici (50.) pour le terme de rang quelconque $n > m$, et en nommant R la somme de tous ceux qui le suivent,

$$R < \frac{a_{n+1}}{1-z} > \frac{a_n z(n-m)}{n+1-z(n-m)},$$

pourvu qu'on ne prenne que les valeurs absolues de a_n et a_{n+1}.

Lorsque la valeur de z s'approche beaucoup de l'unité, en lui demeurant néanmoins inférieure, la première de ces limites devient très grande, et elle peut s'écarter considérablement de la véritable valeur de R, à moins que sa différence avec la seconde limite ne soit elle même une petite fraction de chacune d'elles. Mais dans le cas particulier de $z = 1$, ces limites devenant

$$R < \infty > \frac{(n-m)a_n}{m+1},$$

elles n'apprennent absolument rien sur la convergence ou la non-convergence de la série, bien qu'alors même le reste de cette série, à quelque terme qu'on l'arrête, soit nullement susceptible d'une limite finie.

Cet inconvénient, au surplus, a lieu pareillement dans l'application du théorème de *Lagrange* aux hypothèses actuelles.

56.

Comme exemple d'une série décroissante dont la valeur devient infinie en même tems que sa limite supérieure, nous considérerons la série

$$\log(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \text{etc.} + \frac{z^n}{n} + \text{etc.}$$

qui, par l'application des règles du No. 50., conduit aux limites suivantes du reste R, relatif au cas où l'on s'arrêterait au terme $a_n = \frac{z^n}{n}$,

$$R < \frac{z^{n+1}}{(n+1)(1-z)} > \frac{z^{n+1}}{n(n-z)+1},$$

attendu qu'on a ici $\text{tang}\,\omega' = \frac{1}{z} - 1$ et $\text{tang}\,\omega = \frac{n+1}{nz} - 1$. Or ces deux limites deviennent par la supposition de $z = 1$,

$$R < \tfrac{1}{0} > 1, \text{ tandis que } \log(1-z) = \tfrac{1}{0}.$$

Il est sans doute inutile de dire que, dans ce dernier exemple comme dans celui qui précède, la limite supérieure de R devenant négative pour toute valeur de z plus grande que l'unité, c'est un signe certain que la série cesse d'être convergente et de représenter par conséquent les valeurs de la fonction dont elle tire son origine.

Dans l'un et l'autre des cas qui nous occupent, les valeurs sont imaginaires en effet; mais il est bien des cas où les mêmes circonstances peuvent se présenter sans que la fonction génératrice cesse d'avoir une valeur réelle et finie, algébriquement parlant: tel est, par exemple, le développement si connu

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc. de la fraction } \frac{1}{1-z},$$

laquelle devient infinie pour $z = 1$, et change simplément de signe pour $z > 1$; de sorte que la seule chose qu'on puisse affirmer, dans le cas où la limite supérieure du reste des séries se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, c'est que les fonctions génératrices correspondantes éprouvent un changement d'état algébrique quelconque, et qu'elles cessent d'être représentées, même sous le point de vue analytique, par leur développement toutes le fois que la limite dont il s'agit devient négative. On concoit, en effet, qu'une série à termes positifs ne pouvant changer de signe, ni acquérir explicitement des valeurs imaginaires pour des valeurs réelles et positives des variables qui y entrent, il faut bien que l'absurdité, ou la contradiction se manifeste par quelque signe particulier, tel que la valeur infinie ou négative de la limite supérieure de ces restes.

Paris le 25. Juillet 1833.

2.

De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.

(Auct. *C. G. J. Jacobi,* prof. ord. math. Regiom.)

1.

In Fundamentis Novis Theoriae Functionum Ellipticarum adnotavi (pg. 85.), duplicem periodum amplecti universam, quae in analysi fingi possit, periodicitatem. Quam rem sequentibus accuratius examinemus.

Periodicam voco functionem $\lambda(u)$, si datur constans i talis, ut pro quolibet ipsius u valore sit

$$\lambda(u+i) = \lambda(u).$$

Constantem i functionis voco *indicem*. Patet autem, ex uno indice innumeros provenire alios, cum eius multiplum positivum aut negativum quodcunque et ipse sit index. E quorum numero eum, cuius nulla pars aliquota functionis index est, indicem functionis dico *proprium*. Circumferuntur in elementis functiones periodicae $\sin(u)$, e^u, quarum indices proprii sunt resp. 2π, $2\pi\sqrt{-1}$.

Iam ponamus, cuius rei exemplum in functionibus ellipticis primum monstrabatur, functionem $\lambda(u)$ duabus gaudere periodis, quas ad unam revocare non liceat. Sint earum indices i, i', unde simul locum habent aequationes:

$$\lambda(u+i) = \lambda(u), \qquad \lambda(u+i') = \lambda(u),$$

de quibus, designantibus m, m' numeros quoscunque integros positivos aut negativos, haec sequitur generalior:

$$\lambda(u+mi+m'i') = \lambda(u),$$

sive erit etiam $mi+m'i'$ index. Et primum patet, *indices i, i' inter se statuendos esse incommensurabiles.* Nam si Δ eorum divisor maximus communis, ponere licet

$$i = m\Delta, \qquad i' = m'\Delta,$$

designantibus m, m' numeros integros inter se primos. Unde alios determinare possumus n, n' tales, ut sit

$$mn + m'n' = 1.$$

Quo facto, habetur index

$$ni + n'i' = \Delta,$$

de quo uno indice cum indices i, i', ut multipla eius, proveniant, videmus, *si duarum periodorum, quibus functio gaudet, sint indices inter se commensurabiles, duas periodos redire in unicam, cuius index ipsorum sit divisor maximus communis.*

Quotientem duorum indicum, qui ex uno non proveniant, cum ex antecedentibus pateat, statui non posse quantitatem rationalem, facile etiam patet, eundem *statui non posse quantitatem realem.* Sit enim

$$i = \varepsilon\Delta, \qquad i' = \varepsilon'\Delta,$$

designantibus ε, ε' quantitates reales inter se incommensurabiles; invenire licet numeros integros positivos vel negativos m, m' tales, ut

$$m\varepsilon + m'\varepsilon' = \varepsilon'',$$

ulla data quantitate minor evadat. Quibus positis, erit

$$\lambda(u + mi + m'i') = \lambda(u + \varepsilon''\Delta) = \lambda(u),$$

unde functio $\lambda(u)$ indicem haberet ulla data quantitate minorem neque tamen evanescentem. Quod fieri non potest.

Sequitur ex antecedentibus, quotics periodorum, quae in unam non redeant indices sint quantitates imaginariae,

$$i = a + b\sqrt{-1}, \qquad i' = a' + b'\sqrt{-1},$$

designantibus a, b, a', b' quantitates reales, numquam haberi posse:

$$ab' - a'b = 0.$$

Tum enim indicum quotientem

$$\frac{a' + b'\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

haberes quantitatem realem.

2.

Examinemus iam, an functio tribus gaudere possit periodis, quae e duabus componere non liceat. Sint trium eiusmodi periodorum indices

$$i = a + b\sqrt{-1}, \qquad i' = a' + b'\sqrt{-1}, \qquad i'' = a'' + b''\sqrt{-1},$$

designantibus a, b, a', b', a'', b'' quantitates reales. Supponimus ex antecedentibus, e tribus quantitatibus

$$a'b'' - a''b', \qquad a''b - ab'', \qquad ab' - a'b$$

nullam evanescere. Alioquin enim aut duae periodi in unam redirent, quod est contra hypothesin, aut functio haberet indicem minorem quam

ullam quantitatem datam, neque tamen evanescentem, quod est absurdum. Ac primum observo, tres illas quantitates inter se esse non posse, ut numeros integros, vel eandem eas quantitatem metiri non posse.

Ponamus enim, esse

$$a'b''-a''b' : a''b-ab'' : ab'-a'b = m : m' : m'',$$

designantibus m, m', m'' *) numeros integros, quos factore communi destitutos accipimus. Erit

$$ma + m'a' + m''a'' = 0,$$
$$mb + m'b' + m''b'' = 0,$$

ideoque etiam

$$mi + m'i' + m''i'' = 0.$$

Sit f divisor maximus communis ipsorum m', m'', qui ad m primus esse debet, cum tres numeri m, m', m'' per eundem numerum non dividuntur; erit etiam

$$\frac{mi}{f} = -\left[\frac{m'}{f}.i' + \frac{m''}{f}.i''\right]$$

index functionis. Iam cum indices i et $\frac{mi}{f}$ sint inter se commensurabiles, eorumque divisor maximus communis sit $\frac{i}{f}$, erit etiam $\frac{i}{f}$ index, uti §. 1., demonstratum est. Eligantur porro numeri n', n'' tales, ut sit

$$\frac{m'}{f}.n' + \frac{m''}{f}.n'' = 1;$$

dico, tres periodos componi e duabus, quarum indices sunt

$$\frac{i}{f} \text{ et } n''i' - n'i'',$$

quippe e quibus et index i componatur et reliqui indices i', i''. Habetur enim

$$-mn'.\frac{i}{f} + \frac{m''}{f}(n''i' - n'i'') = n'\left[\frac{m'}{f}i' + \frac{m''}{f}i''\right] + \frac{m''}{f}[n''i' - n'i''] = i'$$
$$-mn''.\frac{i}{f} - \frac{m'}{f}(n''i' - n'i'') = n''\left[\frac{m'}{f}i' + \frac{m''}{f}i''\right] + \frac{m'}{f}[n''i' - n'i''] = i''.$$

Unde si quantitates tres

$$a'b'' - a''b', \qquad a''b - ab'', \qquad ab' - a'b$$

sunt, ut numeri integri, sive, quod idem est, *si designantibus m, m', m'' numeros integros, inter tres indices i, i', i'' locum habet aequatio huiusmodi*

$$mi + m'i' + m''i'' = 0;$$

---

*) Hic et in sequentibus numeros integros accipimus sive positivos sive negativos.

tres periodos e duabus componere licet, sive functio tantum dupliciter periodica est.

Observo secundo loco, *designantibus* α, α', α'' *numeros integros locum habere non posse aequationem huiusmodi:*

$$\alpha(a'b''-a''b')+\alpha'(a''b-ab'')+\alpha''(ab'-a'b)=0.$$

Nam ex arbitrio acceptis sex aliis numeris integris

$$\beta,\ \beta',\ \beta''; \qquad \gamma,\ \gamma',\ \gamma'',$$

statuamus:

$$u=(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')a+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')a'+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)a'',$$
$$u'=(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')a+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')a'+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)a'',$$
$$v=(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')b+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')b'+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)b'',$$
$$v'=(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')b+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')b'+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)b'';$$

unde functionis propositae indices etiam hi erunt,

$$u+v\sqrt{-1}, \qquad u'+v'\sqrt{-1}.$$

Iam si statuitur

$$\varepsilon=\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\alpha'(\beta''\gamma-\beta\gamma'')+\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma),$$

invenitur:

$$uv'-u'v=\varepsilon[\alpha(a'b''-a''b')+\alpha'(a''b-ab'')+\alpha''(ab'-a'b)].$$

Unde si expressio uncis inclusa evanescit, habetur

$$uv'-u'v=0.$$

Hanc vero aequationem vidimus §. 1. locum habere non posse, nisi indices

$$u+v\sqrt{-1}, \qquad u'+v'\sqrt{-1},$$

sint inter se commensurabiles, sive ex uno indice proveniant. Quo casu statui potest, designantibus f, f' **integros,**

$$f(u+v\sqrt{-1})-f'(u'+v'\sqrt{-1})=0,$$

quae aequatio, substitutis ipsarum u, v, u', v' **valoribus, hanc formam induit,**

$$mi+m'i'+m''i''=0,$$

ubi m, m', m'' **integri; quam locum habere non posse demonstravimus.**

3.

His praeparatis, iam demonstrabo, *si tres periodos ad duas revocari non possint, semper determinari posse numeros integros* m, m', m'' *tales, ut utraque simul expressio,*

$$ma+m'a'+m''a'',$$
$$mb+m'b'+m''b'',$$

ulla data quantitate minor evadat, sive functionem propositam indi-

cem habere minorem quam ullam quantitatem datam neque tamen evanescentem.

Pono brevitatis causa:

$$a'b''-a''b' = A, \qquad a''b-ab'' = A', \qquad ab'-a'b = A'',$$

unde

$$aA+a'A'+a''A'' = 0, \qquad bA+b'A'+b''A'' = 0.$$

Porro, designantibus α, α', α'' numeros integros, pono

$$\frac{\alpha A'}{A}-\alpha' = \Delta, \qquad \frac{\alpha A''}{A}-\alpha'' = \Delta';$$

unde

$$\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a'' = -[a'\Delta+a''\Delta'],$$
$$\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b'' = -[b'\Delta+b''\Delta'].$$

Iam numeros α, α' ita determinare licet, ut Δ ulla data quantitate minor fiat. Porro, determinatis α, α', tertium numerum α'' ita accipere licet, ut signi respectu non habito, fiat

$$\Delta' < \tfrac{1}{2}.$$

Qua ratione determinatis α, α', α'', expressiones antecedentes fiunt respective absolute minores quam $\frac{1}{2}a''$ et $\frac{1}{2}b''$. Unde *datis quantitatibus a, a', a'' et b, b', b'', semper determinare licet numeros integros α, α', α'' tales, ut posito*

$$a''' = \alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a'', \qquad b''' = \alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b'',$$

simul fiat

$$a''' < \tfrac{1}{2}a'', \qquad b''' < \tfrac{1}{2}b'',$$

signorum respectu non habito.

Ponatur iam successive:

$$\beta a' +\beta' a'' +\beta'' a''' = a^{\text{IV}}, \qquad \beta b' +\beta' b'' +\beta'' b''' = b^{\text{IV}},$$
$$\gamma a'' +\gamma' a''' +\gamma'' a^{\text{IV}} = a^{\text{V}}, \qquad \gamma b'' +\gamma' b''' +\gamma'' b^{\text{IV}} = b^{\text{V}},$$
$$\delta a''' +\delta' a^{\text{IV}} +\delta'' a^{\text{V}} = a^{\text{VI}}, \qquad \delta b''' +\delta' b^{\text{IV}} +\delta'' b^{\text{V}} = b^{\text{VI}}.$$
$$. \quad .$$

Coëfficientes harum aequationum β, γ etc., β', γ' etc., β'', γ'' etc. accipere licet ex antecedentibus numeros integros tales, ut simul fiat, signorum respectu non habito,

$$a^{\text{IV}} < \tfrac{1}{2}a''', \qquad a^{\text{V}} < \tfrac{1}{2}a^{\text{IV}}, \qquad a^{\text{VI}} < \tfrac{1}{2}a^{\text{V}}, \quad \text{etc.}$$
$$b^{\text{IV}} < \tfrac{1}{2}b''', \qquad b^{\text{V}} < \tfrac{1}{2}b^{\text{IV}}, \qquad b^{\text{VI}} < \tfrac{1}{2}b^{\text{V}}. \quad \text{etc.}$$

Unde liquet, duarum serierum

$$a'', \quad a''', \quad a^{\text{IV}}, \quad a^{\text{V}}, \quad a^{\text{VI}}, \quad \ldots.$$
$$b'', \quad b''', \quad b^{\text{IV}}, \quad b^{\text{V}}, \quad b^{\text{VI}}, \quad \ldots.$$

terminos, si satis illae continuentur, ulla data quantitate minores fieri,

Sint duarum serierum termini sibi respondentes $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, data quantitate minores. Si formationem aequationum respicis, quibus quantitates illae ab antecedentibus pendent, sine negotio patet, eas per ipsas a, a', a'' atque b, b', b'' exprimi posse ope aequationum:

$$a^{(n)} = ma + m'a' + m''a'',$$
$$b^{(n)} = mb + m'b' + m''p'',$$

in quibus coëfficientes m, m', m'' sunt numeri integri. In utraque porro aequatione hos coëfficientes eosdem esse, cum quantitates $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ resp. per easdem aequationes a terminis eas antecedentibus pendeant. Unde evictum est, quod propositum erat, determinari posse numeros integros p, aut n, m, m', m'' tales, ut utraque simul expressio

$$ma + m'a' + m''a'',$$
$$mb + m'b' + m''b'',$$

data quantitate minor evadat.

Algorithmus assignatus, quo serierum duarum termini alii post alios inveniuntur, non turbatur, si in altera serie evanescit terminus. Tum quidem proximus terminus semisse eius minor non fit, cum termino evanescente minor non detur, si signa non respicimus. At facile patet, evanescente alterius seriei termino, proximum minorem reddi posse quam ullam quantitatem datam. Sit ex. gr. $a'' = 0$, invenitur terminus proximus

$$a''' = -a'\Delta,$$

ubi Δ data quavis quantitate minor reddi poterat. Hoc igitur termino usus, ulla data quantitate minore, continuabis algorithmum, dum etiam alterius seriei termini data quantitate minores fiunt. Neque simul in utraque serie termini sibi respondentes evanescere possunt. Nam ubi simul haberetur

$$a^{(n)} = 0, \qquad b^{(n)} = 0,$$

darentur numeri m, m', m'', pro quibus simul

$$a^{(n)} = ma + m'a' + m''a'' = 0,$$
$$b^{(n)} = mb + m'b' + m''b'' = 0,$$

ideoque etiam

$$mi + m'i' + m''i'' = 0.$$

Quod fieri non posse, vidimus §. 2., nisi tres periodi e duabus componere liceat.

Algorithmus assignatus porro supponit, numquam haberi

$$a^{(n)}b^{(n+1)} - a^{(n+1)}b^{(n)} = 0;$$

quod hoc modo patet. Sit enim

$$a^{(n+1)} = p\,a + p'a' + p''a'', \qquad b^{(n+1)} = p\,b + p'b' + p''b''.$$

Erit

$$0 = a^{(n)}\,b^{(n+1)} - a^{(n+1)}\,b^{(n)} =$$

$$(m'p''-m''p')(a'b''-a''b') + (m''p-mp'')(a''b-ab'') + (mp'-m'p)(ab'-a'b).$$

Quam aequationem locum habere non posse, §. 2. dnmonstratum est.

4.

Si statuimus

$$a^{(n)} + b^{(n)}\sqrt{-1} = i^{(n)},$$

patet, i''', i^{IV}, i^{V} etc. fore indices functionis propositae. Indicavimus igitur certum quemdam algorithmum, quo, datis tribus indicibus imaginariis, formatur series infinita indicum, quorum pars realis simul atque pars imaginaria ulla data quantitate minor evadit, neque tamen simul evanescere potest. Unde omnibus casibus evictum est, *si functio proposita tribus periodis gaudeat, aut eas e duabus camponi, aut eam habere indicem omni data quantitate minorem.* Quod cum absurdum sit, *functio tripliciter periodica non datur.*

Bono iure igitur dixisse videmur, duplici periodo universam confici periodicitatem. Sed hoc tantum de functionibus unius variabilis valet. Si functiones plurium variabilium consideras, longe abest, ut in duplici periodo consistendum sit.

Exempla functionum plurium variabilium, quae pluribus quam duabus periodis gaudent, suppeditant functiones illae, quas primus consideravi in Commentatiuncula *de transcendentibus Abelianis* (Diar. *Crell.* Vol. IX. pag. 394). Sed res gravissima altius repetenda est.

Sit

$$u = C + \frac{2A}{\pi}.\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + A_3 \sin 6\varphi + \ldots.$$

series pro valoribus omnibus realibus ipsius φ convergens. Statuamus, x esse ipsius $\sin^2\varphi$ functionem plane determinatam, ex. gr. functionem rationalem. Mutato φ in $\varphi+\pi$, non mutabitur x, mutabitur vero u in $u+2A$. Hinc, posito

$$x = \lambda(u),$$

fit

$$\lambda(u+2A) = \lambda(u).$$

Erit igitur $\lambda(u)$ functio periodica, eiusque index $2A$.

Consideremus iam integrale huiusmodi,

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]}} = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}},$$

designantibus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 quantitates reales, positivas, unitate minores. Cuius integralis examinemus valores, quos induit, crescente x per valores reales a $-\infty$ usque ad $+\infty$. Sit $\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$: distinguemus intervalla sex, in quibus x versari potest:

1. $-\infty \ldots 0$, 2. $0 \ldots 1$, 3. $1 \ldots \frac{1}{\varkappa^2}$, 4. $\frac{1}{\varkappa^2} \ldots \frac{1}{\lambda^2}$,

5. $\frac{1}{\lambda^2} \ldots \frac{1}{\mu^2}$, 6. $\frac{1}{\mu^2} \ldots \infty$.

Pro intervallo primo, tertio, quinto erit valor ipsius x negativus, pro secundo, quarto, sexto positivus. Quaeramus iam, quomodo pro singulis intervallis illis ipsum x ita per $\sin^2\varphi$ exprimatur, ut integrale propositum u in seriem infinitam convergentem formae, quam assignavimus,

$$u = C + \frac{2A}{\pi}.\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + A_3 \sin 6\varphi + \ldots$$

evolvi possint. Quo modo facto, posito $x = \lambda(\mu)$, erit functio $\lambda(\mu)$ periodica, eiusque index $2A$ sive

$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}.\partial\varphi.$$

1°. Si ipsi x convenit valor negativus quicunque, ponatur

$$1. \qquad x = \frac{-1}{\mu^2 tang^2 \varphi};$$

crescente x per valores negativos a $-\infty$ ad 0, crescit φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Facta substitutione, posito brevitatis causa:

$$\varkappa' = 1 - \varkappa^2, \qquad \lambda'^2 = 1 - \lambda^2, \qquad \mu'^2 = 1 - \mu^2,$$

eruitur:

$$u = \int_0^x \frac{\partial x (\alpha + \beta x)}{\sqrt{-X}}$$
$$= \frac{2}{\varkappa\lambda} \int_0^\varphi \frac{[(\beta + \alpha\mu^2)\sin^2\varphi - \beta]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Unde posito

$$u_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha + \beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}}$$
$$= \frac{2}{\varkappa\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\alpha\mu^2 + \beta)\sin^2\varphi - \beta]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

erit

$$u = \frac{u_1}{\sqrt{-1}} + \frac{2\sqrt{-1}}{\varkappa\lambda}\int_0^{\varphi} \frac{[(\alpha\mu^2+\beta)\sin^2\varphi - \beta]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

Iam observo, integrale huiusmodi

$$\int_0^{\varphi} \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{[(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)]}},$$

quoties p^2, q^2, r^2 reales unitate minores, semper evolvi posse in seriem convergentem formae

$$\frac{2A}{\pi}.\varphi + A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi + A_3\sin 6\varphi \ldots,$$

ubi

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{[(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Unde u in formam propositam evolvere licet; atque fit

$$C = \frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \qquad A = u_1\sqrt{-1}.$$

Posito igitur $x = \lambda(u)$, erit $\lambda(u)$ functio periodica, cuius index $2u_1\sqrt{-1}$, sive erit

$$\lambda(u + 2u_1\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

2. Si x inter 0 et 1, pono

$$2. \qquad x = \sin^2\varphi;$$

fit

$$u = 2\int_0^{\varphi} \frac{[\alpha+\beta\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{[(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Unde posito

$$u_2 = \int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha+\beta\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{[(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)]}},$$

ipsam u in formam assignatam evolvere licet, cuius coëfficientes primi erunt,

$$C = 0, \qquad A = u_2.$$

Erit igitur functionis $x = \lambda(u)$ alter index $2u_2$, sive erit etiam

$$\lambda(u + 2u_2) = \lambda(u).$$

3°. Sit x inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, pono

$$3. \qquad x = \frac{1}{\cos^2\varphi + \varkappa^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{1-\varkappa'^2\sin^2\varphi}.$$

Integrale u cum a^0 usque ad x sumatur, intervallum in duo divido, alterum inter 0 et 1, alterum inter 1 et x. Quo facto, post substitutionem adhibitam eruimus:

$$u = u_2 + \frac{2\sqrt{-1}}{\lambda'\mu'}\int_0^{\varphi} \frac{[\alpha+\beta-\alpha\varkappa'^2\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\mu'^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Unde posito

$$u_3 = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}}$$

$$= \frac{2}{\lambda'\mu'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha+\beta-\alpha\varkappa'^2\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\mu'^2}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

ipsam u in seriem formae propositae evolvere licet, cuius primi coëfficientes erunt

$$C = u_2, \qquad A = u_3\sqrt{-1}.$$

Unde functio $x = \lambda(u)$ etiam indice gaudet $2u_3\sqrt{-1}$, sive erit etiam

$$\lambda(u + 2u_3\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

4°. Procedimus ad intervallum quartum inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$; in quo si x versatur, pono

$$4. \qquad x = \frac{\lambda'^2\cos^2\varphi + \varkappa'^2\sin^2}{\varkappa^2\lambda'^2\cos^2\varphi + \lambda^2\varkappa'^2\sin^2\varphi} = \frac{\lambda'^2 - (\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}{\varkappa^2\lambda'^2 - (\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi},$$

quo facto, crescente x a $\frac{1}{\varkappa^2}$ usque ad $\frac{1}{\lambda^2}$, crescit φ a 0 usque ad $\frac{\pi}{2}$. Facta substitutione, integrale propositum abit in hoc,

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} =$$

$$+ u\sqrt{-1} - \frac{2}{\varkappa\lambda'^3\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}}\int_0^{\varphi} \frac{[\lambda'^2(\alpha\varkappa^2+\beta) - (\varkappa^2-\lambda^2)(\alpha+\beta)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\mu'^2(\varkappa^2-\lambda^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Quod cum rursus in formam assignatam evolvere liceat, habentur, posito

$$u_4 = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} =$$

$$\frac{2}{\varkappa\lambda'^3\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\lambda'^2(\alpha\varkappa^2+\beta) - (\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\mu'^2(\varkappa^2-\lambda^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

evolutionis coëfficientes primi:

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1}, \qquad A = u_4;$$

unde functio $x = \lambda(u)$ habet indicem $2u_4$, sive fit etiam:

$$\lambda(u + 2u_4) = \lambda(u).$$

5°. Quinto loco sit x inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$, quo casu ponimus:

$$5. \qquad x = \frac{(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi + (\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi + \mu^2(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi} = \frac{\varkappa^2-\mu^2-(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2) - \varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi},$$

quo facta rursus, crescente x a $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $\frac{1}{\mu^2}$, crescit φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Trans-

acta substitutione, obtinemus:

$$u = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4$$

$$-\frac{2\sqrt{-1}}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}}\int_0^{\varphi}\frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Quam expressionem rursus patet, in formam assignatam evolvi posse, eruntque, posito

$$u_5 = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}} =$$

$$\frac{2}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

evolutionis factae coëfficientes primi

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4, \qquad A = -u_5\sqrt{-1}.$$

Unde functio $x = \lambda(u)$ etiam habebit indicem $2u_5\sqrt{-1}$, sive erit

$$\lambda(u + 2u_5\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

6°. Denique si x in intervallo sexto versatur, inter $\frac{1}{\mu^2}$ et ∞, pono

$$6. \qquad x = \frac{1}{\mu^2} + \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{tang}^2\varphi,$$

provenit

$$u = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1}$$

$$+\frac{2}{\lambda^3\mu'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}}\int_0^{\varphi}\frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Qua expressione in formam assignatam evoluta, quod licet, positoque

$$u_6 = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{\partial x}{\sqrt{X}} =$$

$$\frac{2}{\lambda^3\mu'^3\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\partial\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

habentur coëfficientes primi evolutionis:

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1}, \qquad A = u_6,$$

unde functio $x = \lambda(u)$ etiam indicem $2u_6$ habet, sive erit

$$\lambda(u + 2u_6) = \lambda(u).$$

Unde iam demonstravimus, quod propositum erat; quomodo pro valoribus omnibus realibus ipsius x, integrale propositum

$$u = \int_0^x \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}},$$

evolvi possit in seriem convergentem formae

$$u = C + \frac{2A}{\pi}.\varphi + A'\sin 2\varphi + A''\sin 4\varphi + A'''\sin 6\varphi + \ldots.$$

Atque sex evolutiones inter se diversae, quas pro intervallis sex, in quibus x versari potest, assignavimus, suggerebant totidem functionis periodicae $\varkappa = \lambda(u)$ indices.

5.

Antecedentibus pro singulis intervallis eas adhibuimus substitutiones, quibus integrale propositum in eandem semper formam abeat

$$C + \int_0^{\varphi} \frac{(m + n\sin^2\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{[(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)]}},$$

ubi p^2, q^2, r^2 unitate minores; simulque, crescente x a limite inferiore intervalli ad superiorem, crescat φ a 0 ad $\frac{\pi}{2}$. Idem pro singulis intervallis per alterum quoque substitutionem formae eiusdem

$$x = \frac{d + e\sin^2\varphi}{f + g\sin^2\varphi},$$

praestari potest, ita ut, variabili x a limite inferiore crescente ad superiorem, simul φ a $\frac{\pi}{2}$ ad 0 decrescat. Generalius Cl. *Richelot* in commentatione, quae mox lucem videbit, demonstravit, designante X functionem rationalem integram quamcunque sexti ordinis, quae in factores lineares reales resolvi possit, integrale

$$u = \int \frac{(\alpha + \beta x)\partial x}{\sqrt{X}},$$

per duodecim substitutiones reales formae

$$x = \frac{d + e\sin^2\varphi}{f + g\sin^2\varphi},$$

in formam redigi posse

$$\int \frac{(m + n\sin^2\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-q^2\sin^2\varphi)(1-r^2\sin^2\varphi)}},$$

ubi p^2, q^2, r^2 reales, positivae, unitate minores. Idem ille casui generali applicuit, quo X cuiuslibet $2n$ti ordinis est. Ad quem igitur casum etiam considerationes antecedentes extendere licuit. Ceterum per innumeros alias substitutiones perveniri poterat ad formam integralis, quae evolutionem in seriem convergentem secundum cosinus aut sinus multiplorum eiusdem an-

guli procedentem permittit, qua unica hic opus est. Neque tamen per alias substitutiones perveniri potest ad alios indices, nisi qui ex indicibus, a nobis assignatis, componuntur.

At ipsi quoque indices, quos assignavimus, tres reales et tres imaginarii, ita inter se comparati sunt, ut unum realem e duobus reliquis realibus, unum imaginarium e duobus reliquis imaginariis componere liceat. Quod sequentibus comprobemus.

Integrale propositum

$$u = \int_0^x \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}},$$

determinatum non est, nisi pro singulis intervallis de signo radicalis conventum sit. Iam cum pro proximo quoque intervallo novus factor expressionis, quae sub radicali est, signum mutet, statuimus, inde multiplicationem nasci per eandem semper quantitatem $\sqrt{-1}$, ita ut expressioni $\frac{1}{\sqrt{X}}$ in intervallis assignatis resp. signa conveniant,

$$-\sqrt{-1}, \quad +, \quad +\sqrt{-1}, \quad -, \quad -\sqrt{-1}, \quad +,$$

si etiam praefixum $\pm\sqrt{-1}$ signis adnumerare licet. His statutis, nanciscimur, adhibitis ipsarum u_1, u_2 etc. valoribus supra propositis,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}} = -\sqrt{-1}.u_1 + u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1} + u_6.$$

Iam cum posito $\frac{1}{x}$ loco x duo limites coincidant, coniicio, fore

$$0 = -\sqrt{-1} - u_1 + u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1} + u_6;$$

sive

$$u_1 + u_5 = u_3, \qquad u_2 + u_6 = u_4,$$

vel quod idem est:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{-X}} = \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{-X}},$$

$$\int_{0}^{1} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{\partial x(\alpha+\beta x)}{\sqrt{X}},$$

quibus in aequationibus $\sqrt{-X}$ et $\sqrt{X}$ resp. semper positivae accipiantur. Sed cum propter ambiguitatem radicalis $\sqrt{X}$ aliam formularum antecedentium memorabilium demonstrationem desideremus, deducemus easdem de casu speciali theorematis Abeliani. Quem hic accuratius exponemus.

6.

Consideremus aequationem cubicam sequentem

$$f(x) = x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) - h(1-x)(1-\lambda^2 x) = 0,$$

cuius radices tres spectamus ut functiones ipsius h. Sit rursus

$$1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2;$$

si h est positiva, posito

$$x = -\infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\mu^2},\ +\infty,$$

functio $f(x)$ signis afficitur:

$$-,\ -,\ +,\ +,\ -,\ -,\ +.$$

Unde aequationis cubicae radices tres sunt reales, una inter 0 et 1, secunda inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, tertia inter $\frac{1}{\mu^2}$ et $+\infty$. Si h est negativa, pro iisdem ipsius x valoribus functio $f(x)$ resp. afficitur signis:

$$-,\ +,\ +,\ -,\ -,\ +,\ +.$$

Unde hoc quoque casu aequationis cubicae tres radices reales sunt, prima negativa, reliquae positivae, et secunda quidem inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, tertia inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$ posita.

Aequatione proposita differentiata, facile prodit

$$\frac{\partial h}{h\,\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1-\varkappa^2}{(1-x)(1-\varkappa^2 x)} + \frac{\lambda^2-\mu^2}{(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)} - \frac{\varkappa^2-\lambda^2}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)} - \frac{\mu^2}{1-\mu^2 x}.$$

Haec formula docet,

1) si h sit positiva, atque x aut inter 0 et 1, aut inter $\frac{1}{\varkappa^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, aut $\frac{1}{\mu^2}$ et $\frac{1}{\infty}$,

2) si h sit negativa, atque x aut negativa, aut inter 1 et $\frac{1}{\varkappa^2}$, aut inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{\mu^2}$,

expressionem $\frac{\partial x}{\partial h}$ semper fieri positivam. Unde utroque casu, quo h aut positiva est aut negativa, aequationis cubicae radices tres omnes simul cum h continuo crescunt vel decrescunt. Iam

$$\text{posito } h = -\infty, \text{ fiunt radices } -\infty,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\text{- - } h = 0, \text{ - - - } 0,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\mu^2},$$

$$\text{- - } h = +\infty, \text{ - - - } 1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ +\infty.$$

Unde si resp. vocamus utroque casu a, b, c radices, quae magnitudine se excipiunt, quas diximus primam, secundam, tertiam, videmus, continuo crescere simul:

h ab 0 ad $+\infty$, a ab 0 ad 1, b ab $\frac{1}{\varkappa^2}$ ad $\frac{1}{\lambda^2}$, c ab $\frac{1}{\mu^2}$ ad ∞,

h ab $-\infty$ ad 0, a ab $-\infty$ ad 0, b ab 1 ad $\frac{1}{\varkappa^2}$, c ab $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $\frac{1}{\mu^2}$.

Unde simul etiam continuo crescunt:

h ab $-\infty$ ad $+\infty$, a ab $-\infty$ ad 1, b ab 1 ad $\frac{1}{\lambda^2}$, c ab $\frac{1}{\lambda^2}$ ad $+\infty$.

Iam statuamus, crescente h ab h_0 ad h_1, simul crescere a ab a_0 ad a_1, b ab b_0 ad b_1, c ab c_0 ad c_1. Posito

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x),$$

habetur e differentiatione aequationis propositae,

$$f'(x)\partial x - (1-x)(1-\lambda^2 x)\partial h = 0,$$

vel si substituitur

$$(1-x)(1-\lambda^2 x)\sqrt{h} = \sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]} = \sqrt{X},$$

habetur, multiplicatione facta per $\alpha+\beta x$,

$$\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial h(\alpha+\beta x)}{\sqrt{h}.f'(x)}.$$

Si in hac formula loco x ponimus tres eius valores a, b, c, prodeunt formulae tres,

$$\int_{a_0}^{a_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_1}\frac{(\alpha+\beta a)\partial h}{\sqrt{h}f'(a)}, \quad \int_{b_0}^{b_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_1}\frac{(\alpha+\beta b)\partial h}{\sqrt{h}f'(b)},$$

$$\int_{c_0}^{c_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_0}\frac{(\alpha+\beta c)\partial h}{\sqrt{h}f'(c)}.$$

Iam cum e theoremate algebraico notissimo habeatur,

$$\frac{\alpha+\beta a}{f'(a)} + \frac{\alpha+\beta b}{f'(b)} + \frac{\alpha+\beta c}{f'(c)} = 0,$$

provenit, tres formulas propositas summando, si $\sqrt{h}$ in eodem signo accipitur,

$$\varepsilon\int_{a_0}^{a_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \varepsilon_1\int_{b_0}^{b_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \varepsilon_2\int_{c_0}^{c_1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = 0;$$

factoribus ε, ε_1, ε_2, qui propter ambiguitatem radicalis adiiciendi erant, aut $+1$ aut -1 designantibus.

Ad determinandos factores ε, ε_1, ε_2, observo, in calculum nostrum introductum esse radicale $\sqrt{X}$ in locum expressionis

$$\sqrt{X} = \sqrt{h}(1-x)(1-\lambda^2 x),$$

quae eodem signo affecto est, si x inter $-\infty$ et 1 atque si x inter $\frac{1}{\lambda^2}$ et $+\infty$, signo opposito, si x inter 1 et $\frac{1}{\lambda^2}$; sive pro prima et tertia radice a et c eodem, pro secunda b opposito signo affecta erit. Unde statui debet:

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Quo facto aequatio nostra fit:

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{c_0}^{c_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{b_0}^{b_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

In qua formula tria radicalia $\sqrt{X}$ eodem signo accipi debent.

Vidimus, simul haberi

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad c_0 = \frac{1}{\mu^2},$$

et

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad c_1 = +\infty,$$

qui valores respondent valoribus

$$h_0 = 0, \qquad h_1 = +\infty.$$

Quibus substitutis, e formula proposita fluit:

$$\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Porro simul habentur

$$a_0 = -\infty, \qquad c_0 = 1, \qquad c_0 = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad c_1 = \frac{1}{\mu^2},$$

qui valores respondent ipsius h valoribus

$$h_0 = -\infty, \qquad h_1 = 0.$$

Unde e formula proposita, ubi simul per $\sqrt{-1}$ divisionem facimus, fluit:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}} = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\sqrt{-X}}.$$

Quibus in formulis tria radicalia $\sqrt{X}$ aut $\sqrt{-X}$ eodem signo accipienda sunt. Quae sunt formulae, quas demonstrandas proposuimus, deductae e formula generaliori de integralibus indefinitis proposita.

In quaestione antecedente suppositum erat, h ipsam x non continere; theorema, a Cl. *Abel* propositum, suppositione nititur multo generaliore, h esse quadratum cuiuslibet functionis rationalis ipsius x.

7.

Antecedentibus probatum est, sex indices a nobis inventos

$$u_1\sqrt{-1}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad u_4, \quad u_5\sqrt{-1}, \quad u_6,$$

revocari ad quatuor ope formularum

$$u_1 + u_5 = u_3, \quad u_2 + u_6 = u_4.$$

Quos indices statuamus,

$$u_2, \quad u_6; \quad u_1\sqrt{-1}, \quad u_5\sqrt{-1}.$$

Neque generaliter u_2 et u_6 aut $u_1\sqrt{-1}$ et $u_5\sqrt{-1}$ revocari poterunt ad eundem indicem, sive erunt u_2 et u_6 nec non u_1 et u_5 inter se incommensurabiles. Unde functio $x = \lambda(u)$ habebit quatuor indices, qui ad minorem numerum revocari non possunt, sive erit illa quadrupliciter periodica. Sed iam tripliciter periodicam non dari, supra pluribus demonstratum est. Hunc vero casum, quo duo indices incommensurabiles sunt reales, duo incommensurabiles imaginarii formae $u_1\sqrt{-1}$, $u_5\sqrt{-1}$, absurdum esse, iam e §. 1. constat. Darentur enim ex iis, quae ibi diximus, functionis $x = \lambda(u)$ indices Δ et $\Delta'\sqrt{-1}$, ubi Δ et Δ' sunt quantitates reales minores quantitate data quantumvis parva. Unde functione $\lambda(u)$ immutata manente, ipsum u induere posset valores omnes reales aut imaginarios, sive e numero valorum, quos ipsum u inducre potest, functione $\lambda(u)$ immutata manente semper forent, qui a data qualibet quantitate reali aut imaginaria minus different quam ulla quantitate data quantumvis parva. Quod absurdum est.

In plures adhuc periodos incideremus, si functio X, quae sub radicali invenitur, ad altiorem quam quintum aut sextum ordinem ascendit. Generaliter enim, si X est $2n$ti aut $(2n-1)$ti ordinis, atque posito

$$u = \int \frac{f(x)\,\partial x}{\sqrt{X}},$$

ubi $f(x)$ est functio quaelibet data rationalis integra, spectatur x ut functio ipsius u, functio habebit $2n-2$ indices, qui ad minorem numerum, nisi casibus specialibus, revocari nequeunt; eorumque erunt, si coëfficientes functionis X sunt quantitates reales, $n-1$ reales, $n-1$ imaginarii.

Eodem enim modo, atque supra pro casu generali, demonstrantur sequentia. Sit

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_1^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x),$$

ubi

$$1 > \varkappa^2 > \varkappa_1^2 \ldots > \varkappa_{2n-5}^2 > \varkappa_{2n-4}^2;$$

aequatio $n$ti ordinis

$x(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_2^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x) = h(1-x)(1-\varkappa_1^2 x)\ldots(1-\varkappa_{2n-5}^2 x)$
habet n radices reales; quas si vocamus $a_1, a_2, \ldots a_n$, ordine magnitudinis se insequentes, crescente h a $-\infty$ ad 0, ac deinde a 0 ad $+\infty$, crescit a_1 a $-\infty$ ad 0, ac deinde a 0 ad 1,

$$a_2 \text{ a } 1 \text{ ad } \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad \text{ac deinde a } \frac{1}{\varkappa^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_1^2},$$

ac generaliter

$$a_m \text{ a } \frac{1}{\varkappa_{2m-5}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \text{ ac deinde a } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2m+3}^2},$$

ac postremo

$$a_n \text{ a } \frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2} \text{ ad } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \text{ ac deinde a } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \text{ ad } +\infty.$$

Iam si crescente h a $h^{(0)}$ ad h', crescit a_m a $a_m^{(0)}$ ad a'_m, erit

$$\int_{a_1^{(0)}}^{a_1^1} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} - \int_{a_2^{(0)}}^{a_2^2} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} + \ldots \pm \int_{a_n^{(0)}}^{a_n^1} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} = 0,$$

designante $f(x)$ functionem quamlibet rationalem integram ordinis $n=2$. De qua formula proveniunt duae speciales:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{-X}} - \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\varkappa_1^2}}^{\frac{1}{\varkappa_2^2}} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{-X}} \ldots \pm \int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2}}^{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{-X}} = 0,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} - \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\varkappa_1^2}} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\varkappa_2^2}}^{\frac{1}{\varkappa_3^2}} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} \ldots \pm \int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}}^{\infty} \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{X}} = 0.$$

Quibus in formulis n radicalia $\sqrt{X}$ aut $\sqrt{X}-$ eodem signo accipienda sunt. Eruntque $2n$ integralia definita apposita duplicata, si in n prioribus loco $\sqrt{-X}$ scribimus $\sqrt{X}$, indices functionis $x = \lambda(u)$, n reales et n imaginarii, qui per aequationes duas antecedentes ad $n-1$ reales, $n-1$ imaginarios revocantur; nec nisi casibus specialibus, ad minorem numerum revocari possunt.

8.

E praemissis concludimus:

„*quemadmodum arcus circulares pro eodem sinu innumeros valores in-*
„*duunt inter se aequidistantes, quemadmodum eiusdem numeri dantur*
„*innumeri logarithmi, eadem quantitate imaginaria inter se distantes;*
„*quemadmodum integralia elliptica pro eodum sinu amplitudinis numero*
„*valorum dupliciter infinito gaudent, quippe quorum et partes reales et*
„*partes imaginariae simul innumeros valores induunt inter se aequi-*

„*distantes: ita integralia Abeliana seu hyperelliptica, hoc est integralia,*
„*in quibus sub signo integrationis invenitur radix quadratica functionis*
„*altioris quam quarti gradus, tantum multiplicatem valorum secum*
„*ferunt, ut pro datis quibuslibet limitibus valores omnes induant reales*
„*aut imaginarios quoscunque, seu ut e numero valorum, quos idem*
„*integrale pro iisdem datis limitibus quibuslibet induere potest, semper*
„*sint, qui a dato quolibet valore reali aut imaginario minus differant*
„*quam ulla quantitate data quantumvis parva.*"

Patet ex antecedentibus, quoties X altioris quam quarti gradus sit, ipsum x non spectari posse ut functionem analyticam ipsius u; neque igitur videtur, methodos generales, quibus olim trigonometria analytica, et quibus nuper theoria functionum ellipticarum condita est, transcendentibus Abelianis applicari posse. At, quod feliciter evenit in hac quasi desperatione, ratio singularis, quam in commentatione anteriore, (Diar. *Crell.* V. IX. pg. 394. sqq.) a longe aliis considerationibus profecti explicuimus, qua unica, nostra sententia, transcendentes Abelianas in analysin introducere convenit, et hic difficultates amovet, quae e multiplicitate valorum integralis oriuntur. Rem, levi mutatione facta, paucis repetam.

9.

Sit rursus X functio rationalis integra quinti aut sexti ordinis; statuamus

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = u,$$
$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} = u',$$

designantibus a, b, α, β, α', β' constantes. Considerari debent x, y ut radices aequationis quadraticae

$$Ux^2 - U'x + U'' = 0,$$

in quibus U, U', U'' sunt functiones ipsarum u, u'. Quoties datur u ut summa plurium integralium

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}},$$

simulque u' ut summa totidem integralium

$$\int \frac{(\alpha'+\beta' x)dx}{\sqrt{X}},$$

quae respective inter eosdem limites sumuntur: habentur a theoremate Abeliano U, U', U'' ut functiones *rationales* horum limitum valorumque,

quos pro iisdem radicale $\sqrt{X}$ induit. Quo igitur casu binae aequationes transcendentes ad algebraicas revocantur. Hac ratione proponere convenit theorema Abelianum, si X quinti aut sexti ordinis est.

Exemplum simplicissimum huius ampli theorematis supra dedimus. Sequitur enim e supra probatis, si statuimus:

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

ubi $1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$, propositis duabus aequationibus transcendentibus,

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{y} \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{z} \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}},$$

$$\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{y} \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{z} \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}},$$

determinari x, y e z ut radices aequationis quadraticae:

$$\frac{(1-z)(1-\lambda^2 z).x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) - z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)(1-x)(1-\lambda^2 x)}{x-z} = 0,$$

sive

$$Ux^2 - U^1 x + U'' = 0,$$

ubi

$$U = \varkappa^2\mu^2(1-z)(1-\lambda^2 z),$$

$$U' = \varkappa^2+\mu^2+[\lambda^2-(\varkappa^2+\mu^2)(1+\lambda^2)-\varkappa^2\mu^2]z+\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)z^2,$$

$$U'' = (1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z).$$

Demonstravimus enim, alteram aequationem transcendentem locum habere, si x, y, z sint radices aequationis cubicae

$$x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) = h(1-x)(1-\lambda^2 x);$$

de qua aequatione eliminata h ope formulae

$$h = \frac{z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1-z)(1-\lambda^2 z)},$$

ac divisione facta per $x-z$, obtinemus duas reliquas radices x, y ut radices aequationis quadraticae propositae. Et cum aequatio illa nullo modo a constantibus α, β afficiatur, eaedem relationes algebraicae, inter x, y, z propositae, satisfaciunt etiam alteri aequationi transcendenti, in qua loco α, β inveniuntur constantes aliae α', β'. Neque novi quid adderetur, si adiungeremus aequationem tertiam transcendentem, in qua rursus aliae constantes α'', β'' loco α, β positae inveniuntur. Nam ubi per relationes inter x, y, z stabilitas, satisfactum est duabus aequationibus transcendentibus propositis, inde alia aequatio

$$\int_0^x \frac{(m+nx)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{y} \frac{(m+nx)\partial x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{z} \frac{(m+nx)\partial x}{\sqrt{X}},$$

quaecunque sint constantes m, n, sua sponte fluit.

10.

Dedimus supra substitutiones sex formae

$$x = \frac{d + e \sin^2 \varphi}{f + g \sin^2 \varphi},$$

quarum ope pro intervallis diversis, in quibus x continetur, integrale.

$$\int \frac{\partial x (\alpha + \beta x)}{\sqrt{X}}$$

in eam formam redegimus, quae evolutionem in seriem convergentem permittit huiusmodi,

$$\int_a^x \frac{\partial x (\alpha + \beta x)}{\sqrt{X}} = C + \frac{2A}{\pi} . \varphi + A' \sin 2\varphi + A'' \sin 4\varphi + A''' \sin 6\varphi \ldots .$$

Substitutiones illae cum nullo modo pendeant a constantibus α, β, singulis casibus per eandem substitutionem etiam eruitur pro aliis constantibus α', β' evolutio convergens:

$$\int_a^x \frac{\partial x (\alpha' + \beta' x)}{\sqrt{X}} = C' + \frac{2B}{\pi} \varphi + B' \sin 2\varphi + B'' \sin 4\varphi + B''' \sin 6\varphi + \ldots .$$

Pro dato alio valore y, sive eiusdem substitutionis ope sive alius,

$$y = \frac{d' + e' \sin^2 \psi}{f' + g' \sin^2 \psi},$$

pro intervallo, in quo y versatur adhibendae, eruantur evolutiones sequentes convergentes:

$$\int_b^y \frac{\partial x (\alpha + \beta x)}{\sqrt{X}} = C_1 + \frac{2A_1}{\pi} . \psi + A_1' \sin 2\psi + A_1'' \sin 4\psi + A_1''' \sin 6\psi + \ldots .$$

$$\int_b^y \frac{\partial x (\alpha' + \beta' x)}{\sqrt{X}} = C_1' + \frac{2B_1}{\pi} . \psi + B_1' \sin 2\psi + B_1'' \sin 4\psi + B_1''' \sin 6\psi + \ldots .$$

Hinc posito

$$\int_a^x \frac{(\alpha + \beta x) \partial x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha + \beta x) \partial x}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha' + \beta' x) \partial x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha' + \beta' x) \partial x}{\sqrt{X}} = u',$$

videmus mutato φ in $\varphi + m\pi$, φ in $\psi + m'\pi$, designantibus m, m' numeros integros positivos aut negativos quoslibet, mutari simul

$$u \text{ in } u + 2mA + 2m'A_1,$$

$$u' \text{ in } u' + 2mB + 2m'B_1,$$

neque simul mutari x, y. Hic sunt A, A_1 e quantitatibus sex, quas supra vocavimus

$$\frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad -u_4, \quad -u_5\sqrt{-1}, \quad u_6,$$

sive eaedem sive diversae, atque B, B_1 sunt quantitates, in quas A, A_1

abeunt, si loco α, β ponitur α', β'. Hinc, si sex quantitates illae, ubi loco α, β ponitur α', β', resp. abeunt in has:

$$\frac{u_1'}{\sqrt{-1}},\quad u_2',\quad u_3'\sqrt{-1},\quad -u_4',\quad -u_5'\sqrt{-1},\quad u_6',$$

sequitur, designantibus m, m', m'', m''' numeros quoslibet integros, mutato

$$u \text{ in } u+\frac{2mu_1}{\sqrt{-1}}+2m'u_2+2m''u_5\sqrt{-1}+2m'''u_6$$

simulque

$$u' \text{ in } u'+\frac{2mu_1'}{\sqrt{-1}}+2m'u_2'+2m''u_5'\sqrt{-1}+2m'''u_6',$$

non mutari x, y. Indices $2u_3\sqrt{-1}$, $2u_4$ ac respondentes $2u_3'\sqrt{-1}$, $2u_4'$ omisimus, cum ad reliquos revocentur. Inventum igitur est theorema sequens, de periodis transcendentium nostrarum fundamentale:

Theorema Fundamentale.

„*Posito*

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

statuatur:

$$2\int_{-\infty}^{0}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{-X}} = i_1, \qquad 2\int_{0}^{1}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = i_2,$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{-X}} = i_3, \qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = i_4,$$

$$2\int_{-\infty}^{0}\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{-X}} = i_1', \qquad 2\int_{0}^{1}\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} = i_2',$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{-X}} = i_3', \qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} = i_4';$$

considerentur x, y ut functiones ipsarum u, u',

$$x = \lambda(u,u'), \qquad y = \lambda'(u,u'),$$

datae per aequationes:

$$\int_a^x\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_b^y\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_b^y\frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\sqrt{X}} = u',$$

erit:

$$\lambda\begin{pmatrix}u+mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\\ u'+mi_1'\sqrt{-1}+m'i_2'+m''i_3'\sqrt{-1}+m'''i_4'\end{pmatrix} = \lambda(u,u'),$$

$$\lambda'\begin{pmatrix}u+mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\\ u'+mi_1'\sqrt{-1}+m'i_2'+m''i_3'\sqrt{-1}+m'''i_4'\end{pmatrix} = \lambda'(u,u'),$$

quicunque sint m, m', m'', m''' numeri integri positivi aut negativi."

Genus periodicitatis, quod theoremate antecedente explicitum est, nihil habet, quod legibus functionum analyticarum obversetur. Sane quidem numeros m, m', m'', m''' ita semper determinare licet, ut expressionum

$$u + m' i_2 + m''' i_4 + (m i_1 + m'' i_3)\sqrt{-1},$$
$$u' + m' i'_2 + m''' i'_4 + (m i'_1 + m'' i'_3)\sqrt{-1}$$

alterutra a data quantitate qualibet

$$p + q\sqrt{-1}$$

minus differat quam ulla quantitate data quantumvis parva; neque tamen id generaliter effici potest, nisi simul iidem numeri ultra omnes limites crescunt; ita ut altera expressione ad datam quantitatem infinite prope accedente, altera simul infinite magna evadat. Unde videmus, in functionibus nostris duarum variabilium quadrupliciter periodicis

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u')$$

tum demum alterum argumentum fieri indeterminatum, si alterum in infinitum abeat. Quod nihil habet absurdi.

Videmus pro iisdem ipsarum x, y valoribus non alterum tantum argumentum certa quadam constante mutari posse, altero immutato manente, sed semper utrumque simul argumentum mutationem subire; ita ut alterius argumenti indice alterius index prorsus determinatus sit. Quae est istius periodicitatis proprietas characteristica, sine qua non locum habere possit.

11.

E theoremate Abeliano constat, positis

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u'),$$

functiones

$$x_n = \lambda(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda'(nu, nu'),$$

datas esse ut radices aequationis quadraticae

$$U_n x^2 - U'_n x + U''_n = 0,$$

in qua U_n, U'_n, U''_n sunt functiones ipsarum x, y, $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$ rationales, si Y ipsius y eadem functio atque X ipsius x. Unde etiam patet, vice versa x, y e x_n, y_n per resolutionem aequationum algebraicarum obtineri. Quarum ordinem e theoremate fnndamentali iam coniicis fore n^4. Quod pro $n = 2$ e theoremate Abeliano facile probas; atque idem adeo theorema facile suggerit resolutionem aequationis 16^{ti} gradus, quae in bisectione

requiritur, per solas extractiones radicum quadraticarum. Quod alia occasione persequemur.

Si vero dantur transformationes, ex eodem theoremate facile coniicis, perveniri ad multiplicationem per quatuor transformationes n^{ti} ordinis, alias post alias applicatas; unde resolutio aequationis n^{4ti} gradus, quae in divisione in n partes requiritur, ad quatuor aequationes n^{ti} gradus revocatur, si divisionem indicum notam supponis. Hanc vero, etiam facile coniicis, si n sit numerus primus, pendere ab aequatione $(1+n+n^2+n^3)^{ti}$ gradus generaliter irresolubili et alia $\frac{n-1^{ti}}{1}$ gradus, quae, illius radicibus ut notis suppositis, solutionem permittit. Atque erit etiam, si n primus, $1+n+n^2+n^3$ numerus transformationum eiusdem n^{ti} ordinis, e quo numero erunt $2(n+1)$ reales.

Scr. 14. Febr. 1834.

3.

Einige mathematische Sätze.

(Von Herrn *S. Loewenstern*, Cand. philos. zu Dorpat.)

I.

Einige Sätze aus der Sphärik.

§. 1. Wenn man in einen beliebigen Sphärenkreis (der Radius der Kugel sei 1), irgend ein beliebiges, sich nicht schneidendes, sphärisches Polygon einschreibt, zu diesem das Polarpolygon construirt, und durch die Axe des Sphärenkreises gröfste Halbkreise auf die Seiten des Polarpolygons senkrecht legt, so werden sie respective durch die Spitzen der diesen Seiten correspondirenden Winkel des Grundpolygons gehen, weil nemlich die Radien, die die Winkelspitzen des Grundpolygons mit dem Mittelpuncte der Kugel verbinden, senkrecht auf den Ebenen der gröfsten Kreise sind, zu denen die Seiten des Polarpolygons gehören. Daher auch die Stücke jener gröfsten Halbkreise, die zwischen den Polen und den Seiten des Polarpolygons enthalten, einander gleich sind.

Hieraus folgt:

a) dafs man in das Polarpolygon einen Kreis einschreiben kann, welches dessen Seiten in denjenigen Puncten berührt, in welchen die durch die Axe des Grundkreises auf dieselben Seiten senkrecht gelegten gröfsten Halbkreise sie treffen.

b) Dafs der in das Polarpolygon eingeschriebene Kreis eine gemeinschaftliche Axe und gemeinschaftliche Pole mit dem Grundkreise hat, weshalb denn die beiden Ebenen, in denen sie liegen, einander parallel, und senkrecht auf allen gröfsten Halbkreisen sind, die durch die Axe der beiden Kreise gehen.

c) Ferner, wenn ϱ und ϱ_1 die resp. zwischen dem Grund- und Polarkreise und den ihnen zunächst liegenden Polen enthaltenen Bogen der gröfsten Halbkreise, die durch die gemeinschaftliche Axe auf die Seiten des Grundpolygons gelegt sind, (Polabstände) bezeichnen, so ist

$$1. \qquad \varrho + \varrho_1 = 90^0.$$

d) Endlich ist der Radius des Grundkreises $\sin\varrho$ und der Radius des in das Polarpolygon eingeschriebenen Kreises (Polarkreises) $\sin\varrho_1 = \cos\varrho$; und die resp. Perpendikel aus dem Mittelpunct der Kugel auf die Ebene des Grund- und Polarkreises sind $\cos\varrho$ und $\cos\varrho_1 = \sin\varrho$.

§. 2. Es sei V das durch die Winkelspitzen des Grundpolygons, und V_1 das durch die Puncte, in welchen der Polarkreis die Seiten des Polarpolygons berührt, bestimmte ebene Polygon, so wird, da wir in §. 1. gesehen haben, dafs die Ebenen der durch die Pole der beiden Kreise und durch die Winkelspitzen von V_1 gehenden gröfsten Halbkreise auch durch die Winkelspitzen von V gehen, und auf den Ebenen dieser Polygone senkrecht sind, V_1 dem V ähnlich sein. Also ist, wenn B den Flächeninhalt von V, und B_1 den von V_1 bezeichnet,

$$B : B_1 = \sin^2\varrho : \sin^2\varrho_1 \ (= \cos^2\varrho).$$

Daher

$$2. \qquad \frac{B}{B_1} = \operatorname{tang}^2\varrho, \quad \text{oder} \quad B = B_1 \operatorname{tang}^2\varrho.$$

Bezeichnen P und P_1 den resp. dreifachen Körperinhalt der Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunct der Kugel ist, und deren Basen V und V_1 sind, so verhält sich

$$P : P_1 = B\cos\varrho : B\cos\varrho_1.$$

Also ist

$$3. \qquad \frac{P}{P_1} = \frac{B}{B_1} \cdot \operatorname{cotang}\varrho.$$

Aus (3.) und (2.) findet man:

$$4. \qquad \frac{P}{P_1} = \operatorname{tang}\varrho, \quad \text{oder} \quad P = P_1 \operatorname{tang}\varrho;$$

und

$$5. \qquad \frac{P^2}{P_1^2} = \frac{B}{B_1}.$$

Aus (4.) ergiebt sich:

$$P^2 + P_1^2 = P_1^2 \sec^2\varrho = B_1^2 \operatorname{tang}^2\varrho.$$

Daher vermöge (2.)

$$6. \qquad P^2 + P_1^2 = BB_1.$$

Anmerkung. Wie die §§. 1. und 2. zu verstehen sind, und dafs alle obigen Gleichungen unverändert bleiben, wenn man das Polarpolygon und den Polarkreis zum Grunde legt, leuchtet von selbst ein.

§. 3. Schreiben wir in den Grundkreis, statt des sphärischen Polygons, ein sphärisches Dreieck ABC ein, so wird durch die Berührungspuncte des Polarkreises im Polardreiecke $A'B'C'$ ein sphärisches Dreieck ABC bestimmt.

Bezeichnen wir nun den resp. dreifachen Körperinhalt der Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunct der Kugel ist, und deren Basen die ebnen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und $A'_1B'_1C'_1$ sind, durch K, K', und K'_1; so ist nach (4.)

$$7. \qquad \frac{K}{K'} = \operatorname{tang}\varrho, \quad \text{oder} \quad K = K'_1 \operatorname{tang}\varrho.$$

Wenn a, b, c die Seiten sind, die im sphärischen Dreiecke ABC resp. den Winkeln A, B, C gegenüberliegen, so ist bekanntlich:

$$2K = \sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C \text{ und}$$
$$2K' = \sin B \sin C \sin a = \sin C \sin A \sin b = \sin A \sin B \sin c.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(a.) \quad 2K^2 = \sin a \sin b \sin c \,.\, K' \text{ und } 2K'^2 = \sin A \sin B \sin C \,.\, K,$$

$$(b.) \quad \frac{K'}{K} = \frac{2K}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2K'} = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \lambda,$$

wenn λ der gleiche Quotient dieser Brüche ist.

Substituiren wir nun in (7.) für K, $\frac{K'}{\lambda}$, so folgt:

$$8. \qquad \frac{K'}{K'_1} = \lambda \,.\, \operatorname{tang}\varrho.$$

Setzt man für $\operatorname{tang}\varrho$ seinen bekannten Werth $\frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{K}$, und $\frac{2K}{\sin a \sin b \sin c}$ für λ, und reducirt, so erhält man:

$$K'_1 = 2 \cos \tfrac{1}{2} a \,.\, \cos \tfrac{1}{2} b \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c \,.\, K'.$$

Da sich auch in das sphärische Dreieck ABC ein Kreis einschreiben läfst, so folgt aus dem Vorhergehenden, wenn ϱ' der Polabstand dieses Kreises ist, und K_1 der dreifache körperliche Inhalt der Pyramide, deren Spitze der Mittelpunct der Kugel, und deren Basis das ebne Dreieck $A_1B_1C_1$ ist, welches durch die geradlinige Verbindung der Berührungspuncte des in das sphärische Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises mit den Bogen a, b, c entsteht:

$$10. \quad \frac{K_1}{K'} = \text{tang}\,\varrho', \quad \text{oder} \quad L_1 = K' \text{tang}\,\varrho',$$

$$11. \quad \frac{K_1}{K} = \lambda\ \text{tang}\,\varrho'$$

und

$$12. \quad K_1 = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C . K.$$

Substituiren wir in (12.) für $\sin \frac{1}{2} A$, etc., $\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}\right)}$, etc. ($s$ ist nemlich $\frac{a+b+c}{2}$), und berücksichtigen, dafs

$K^2 = \sin s . \sin(s-a) \sin(s-b) . \sin(s-c)$ und $\sin a \sin b \sin c = \frac{2K^2}{K'}$,

so erhält man:

$$13. \quad \sin s = \sin \sigma = \frac{KK'}{K_1},$$

wenn $\sigma' = \frac{1}{2}(360^0 - (a+b+c)) =$ dem halben Flächeninhalte des Polardreiecks $A'B'C'$ ist. Und durch Vergleich von (13.) mit (10.):

$$14. \quad \text{tang}\,\varrho' = \frac{K}{\sin s} = \frac{K}{\sin \sigma}.$$

Auf ähnlichem Wege findet man, oder aus (13.) und (14.) schliefst man mit Hülfe von (1.):

$$(15.) \quad -\cos S = \sin \sigma = \frac{KK'}{K_1}$$

und

$$(16.) \quad \text{tang}\,\varrho = \frac{-\cos S}{K'} = \frac{\sin \sigma}{K'},$$

wo $S = \frac{1}{2}(A+B+C)$, und σ der halbe Flächeninhalt des sphärischen Grunddreiecks ist.

§. 4. Wenn man in §. 1. die Puncte, in welchen der Polarkreis die Seiten des Polarpolygons berührt, durch Bogen gröfster Kreise verbindet, und zu dem so erhaltenen Polygone das Polarpolygon construirt, so wird dasselbe den Grundkreis in den Winkelspitzen des Grundpolygons berühren, und umgekehrt. Hievon überzeugt man sich, wenn man in Betracht ziehet, dafs gröfste Halbkreise, durch die Pole der beiden Kreise auf die Seiten des Polarpolygons gelegt, nach §. 1., durch die Winkelspitzen des Grundpolygons gehen, und umgekehrt.

Hieraus ergiebt sich nun, da sowohl in jedes Dreieck ein Kreis eingeschrieben, als auch um jedes Dreieck ein Kreis umschrieben werden

kann, dafs, wenn man fortfährt, Kreise, und durch diese bestimmte sphärische Dreiecke in einander einzuschreiben, ihre Polarkreise und Polardreiecke einander umschrieben sind, und der Flächeninhalt und Seitenumfang der Dreiecke der ersten Reihe der Grenze Null, hingegen der der zweiten der Grenze 360^0 immer mehr und mehr sich nähern, ohne ihnen jemals gleich werden zu können.

Es bezeichne ferner σ_1 und σ'_1 den resp. Flächeninhalt der sphärischen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A'_1B'_1C'_1$, und K_2 und K'_2 den resp. Körperinhalt der zu den in diese Dreiecke eingeschriebnen Dreiecken gehörenden Pyramiden. Dann bezeichne auch $\dot{\sigma}$ und $\dot{K}$ das Analoge in Bezug auf das sphärische Dreieck $\dot{A}\dot{B}\dot{C}$, als Polardreieck des sphärischen Dreiecks $A'_1B'_1C'_1$, und $\dot{\sigma}$ und $\dot{K}$ in Rücksicht auf das Polardreieck von $A_1B_1C_1$, und also auf das um ABC umschriebne sphärische Dreieck, so erhält man, vermöge (13.) und (15.):

$$a)\ \dot{K}K'_1 = K'_2 \sin\dot{\sigma};\qquad b)\ \dot{K}K'_1 = K\sin\sigma'_1;\qquad c)\ \dot{K}'K_1 = K_2\sin\dot{\sigma}';$$
$$d)\ \dot{K}'K_1 = K'\sin\sigma_1.$$

Aus (15.) und (b), und aus (13.) und (d) folgen sodann:

$$17.\qquad \dot{K}K' = \sin\sigma\sin\sigma'_1 \quad\text{und}\quad \dot{K}'K = \sin\sigma'\sin\sigma_1.$$

Ferner durch Verbindung von (a) mit (c) und (b) mit (d) folgt:

$$18.\qquad \dot{K}\dot{K}'.K_1K'_1 = K_2K'_2.\sin\dot{\sigma}\sin\dot{\sigma}' = KK'.\sin\sigma_1\sin\sigma'_1.$$

Man siehet leicht ein, wie diese Art von Gleichungen ins Unendliche sich vervielfältigen lassen, wenn man noch mehrere Dreiecke der oben angeführten Reihen in Betracht ziehet.

§. 5. Wenn man ein Stück einer Kugelfläche (deren Radius 1 ist) welches zwei auf einander senkrechte gröfste Halbkreise begrenzen, durch einen Bogen eines gröfsten Kreises, auf einem der begrenzenden gröfsten Halbkreise senkrecht, theilt, so erhält man zwei gleichschenklige sphärische Dreiecke, in denen die gleichen Seiten und gleichen Winkel 90^0 sind, und deren eines das Polardreieck des andern ist.

Es sei der Scheitelwinkel des einen 2α, so ist der des andern $180^0 - 2\alpha$. Hieraus folgt (man sehe §. 3.), dafs der Körperinhalt der Pyramiden, die zu diesen gleichschenkligen Dreiecken gehören, einander gleich und gleich $\sin\alpha\cos\alpha$ ist. Bezeichnet nun in Rücksicht auf das erste

dieser Dreiecke $\mathfrak{P}$, p_1, $\mathfrak{B}$, b_1, und $\mathfrak{P}$, p, $\mathfrak{B}_1$, b, in Rücksicht auf das andere das Analoge von P, P_1, B, B_1, in §. 2., so ergiebt sich, vermöge (13.) und (15.), da $\sin\sigma = \sin\alpha$, und $\sin\sigma = \cos\alpha$,

$$19. \qquad p\cos\alpha = p\sin\alpha = \mathfrak{P}^2.$$

Hieraus, und dafs $\mathfrak{P} = \sin\alpha\cos\alpha$, folgt:

$$20. \qquad p^2 + p_1^2 = \mathfrak{P}^2 \quad \text{und} \quad p\,p_1 = \mathfrak{P}^2.$$

Ferner aus (5.) ergiebt sich;

$$\frac{\mathfrak{B}}{b} = \frac{\mathfrak{P}^2}{p_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{B}_1}{b} = \frac{\mathfrak{P}}{p^2};$$

und hieraus

$$21. \qquad \frac{b\,b_1}{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}_1} = \mathfrak{P}^2; \quad \frac{\mathfrak{B}\,b}{\mathfrak{B}_1\,b_1} = \frac{p^2}{p_1^2}; \quad \frac{b}{\mathfrak{B}_1} + \frac{b_1}{\mathfrak{B}} = 1; \quad \frac{\mathfrak{B}}{b_1} + \frac{\mathfrak{B}_1}{b} = \frac{1}{\mathfrak{P}^2}.$$

Endlich aus (b) und (20.):

$$22. \qquad p^2 - p_1^2 = \mathfrak{B}_1 b - \mathfrak{B}\,b_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\,b_1 + \mathfrak{B}_1 b = 3\,\mathfrak{P}^2.$$

(Die Fortsetzung folgt.)

4.

Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.

(Von Herrn *C. A. Bretschneider*, Auditor beim Justiz-Collegio zu Gotha.)

In einer, Bd. 10. Hft. 2. dieses Journals befindlichen, Abhandlung hat Hr. Prorector Schmeifser über die jetzt gewöhnliche analytische Behandlung der sphärischen Trigonometrie mehrfachen, zum Theil nicht unbegründeten Tadel ausgesprochen, insbesondere aber den Mangel an allgemeinerer Gültigkeit der analytisch gefundenen Formeln, und die gezwungene und gekünstelte Ableitung derselben aus den Grundformeln gerügt. Indessen will es mich doch bedünken, als ob man die gerügten Unvollkommenheiten nicht sowohl der analytischen Behandlung an sich selbst, sondern vielmehr der bisher üblichen ungenügenden Ausführung derselben zur Last legen sollte; denn leider mufs man bekennen, dafs die sphärische, so wie überhaupt die gesammte Trigonometrie, trotz der zahlreichen, fast jedes Jahr über dieselbe erscheinenden Lehr- und Handbücher, noch sehr der Rundung und Vollendung entbehrt, deren sie in so hohem Grade fähig ist. Es sei mir daher vergönnt, im Folgenden kurz den Weg anzudeuten, der nach meiner Einsicht der zweckmäfsigste sein dürfte, um die Trigonometrie überhaupt auf sichern Grundlagen zu bauen, und insbesondere eine von den gerügten Mängeln freie analytische Darstellung der sphärischen Trigonometrie herbeizuführen.

§. 1.

Was zuvörderst die Allgemeingültigkeit der trigonometrischen Formeln überhaupt betrifft, so beruht dieselbe, so wie die aller andern analytisch-geometrischen Formeln, im Grunde auf weiter nichts, als auf den, der reinen Geometrie gänzlich fremden, Beziehungen des Positiven und Negativen. Es können nemlich alle einzelnen Fälle eines geometrischen Satzes dadurch in eine einzige allgemeine Formel zusammengefafst werden, dafs man gewisse Linien, Flächen u. s. w. als normale annimmt, und auf diese die Lage aller anderen so bezieht, dafs die auf den entgegengesetzten Seiten der normalen liegenden Linien, Flächen u. s. w. auch als untereinander entgegengesetzt betrachtet, und deshalb in den Formeln mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden. Da es rein will-

kürlich ist, welche Lagen man als positive oder negative ansehen will, so wählt man diese immer so, dafs die Bestandtheile der Construction für einen der vorhandenen Fälle sämmtlich positiv werden. Dieser Fall bildet dann den Normalfall, und jede Formel, die für ihn entwickelt wird, gilt dann auch für alle übrigen Fälle, sobald man die denselben entsprechenden Änderungen hinsichtlich der positiven und negativen Werthe der einzelnen Gröfsen berücksichtigt. Die Mathematiker haben dies in gröfster Allgemeinheit bewiesen in der Lehre von der Bestimmung der Lage von Puncten, Linien und Flächen im Raume durch Coordinaten; und an die Allgemeingültigkeit der Coordinatenformeln läfst sich nun die der goniometrischen und trigonometrischen Formeln auf das Engste anschliefsen.

Stellt man sich nemlich in einer Ebene zwei auf einander senkrechte Axen vor, und bezeichnet die beiden Quotienten aus den zwei Coordinaten irgend eines Punctes in der Ebene in dessen Abstand vom Durchschnittspunkte der Axen mit dem Namen des Sinus und Cosinus desjenigen Winkels, welchen die den gedachten Abstand messende Linie mit der einen Axe bildet, so ist klar, dafs diese beiden Functionen, in ihren positiven und negativen Werthen, mit denen der Coordinaten durchaus übereinstimmen müssen. Wird nun noch der Anfangspunct festgesetzt, von dem, und die Richtung, nach welcher die Winkel dieser Functionen gemessen werden sollen, so sind dadurch zugleich die Werthe der Functionen für alle möglichen positiven und negativen Winkel gegeben, und die Lage irgend eines Punctes kann nunmehr aus seinem Abstande vom Anfangspuncte der Coordinaten, und den Functionen des von letzterem und der einen Axe eingeschlossenen Winkels, mit derselben Sicherheit gefunden werden, wie durch Coordinaten. Zugleich erhellt aus der Natur dieser Winkelfunctionen, dafs die Ausdrücke, welche durch deren Einführung in die Coordinatenformeln entstehen, eine mit dieser gleiche Allgemeinheit haben, d. h. für alle möglichen Winkelwerthe gelten müssen. Diese Begründung der Trigonometrie, nach welcher sie sich als eine weitere Ausbildung und unmittelbare Folgerung der Theorie der Coordinaten darstellt, scheint mir die einzige zu sein, durch welche es gelingen kann, Schärfe der Darstellung mit der nöthigen Allgemeinheit zu vereinigen.

§. 2.

Mit Hülfe des Vorigen können nunmehr die Grundformeln der Goniometrie und sphärischen Trigonometrie in gröfster Allgemeinheit gefun-

den werden. Hat man nemlich drei in einem Puncte auf einander senkrechte Axen X, Y, Z, und es sind die beiden Winkel b und c gegeben, welche zwei durch den Mittelpunct gehende gerade Linien B und C mit einer der drei Axen, z. B. X, bilden, so wird der von den Geraden B und C eingeschlossene Winkel a, jederzeit aus den Winkeln b, c und dem Neigungswinkel A der Ebenen XB und XC gefunden werden können. Denn bezeichnet man die Coordinaten zweier auf B und C, gleich weit vom Mittelpuncte abstehenden, Puncte β und γ beziehungsweise mit x, y, z und x', y', z', und die Gerade zwischen β und γ mit k, so ist bekanntlich ganz allgemein $k^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$; und wenn nunmehr statt der Coordinaten die im vorigen Paragraphen aus denselben abgeleiteten Winkelfunctionen substituirt werden, verwandelt sich der angegebene Ausdruck in:

$$(a.) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

welches die Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist; da a, b, c die Seiten und A den der Seite a gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks bilden. Wird $A = 0$, d. h. fallen die Ebenen XB und XC zusammen, so wird $a = b - c$ und (a) verwandelt sich in $\cos(b-c) = \cos b \cos c + \sin b \sin c$, welches die Grundformel der Goniometrie ist, die hiernach als ein specieller Fall der sphärischen Trigonometrie angesehen werden kann. Beide Ausdrücke müssen ganz allgemein, für jeden möglichen Werth der in ihnen vorkommenden Winkel, gelten und diese Allgemeinheit auf alle aus ihnen abgeleiteten Formeln übertragen.

§. 3.

Hat man auf diese Weise die allgemeine Grundformel gefunden, so kommt es nun darauf an, die übrigen Relationen der sphärischen Trigonometrie aus jener möglichst einfach abzuleiten, was bisher freilich so wenig gelungen ist, dafs die sphärische Trigonometrie mehr das Ansehn einer Sammlung von allerhand analytischen Kunststücken, als das eines wohlgeordneten und zusammenhängenden Ganzen erhalten hat. Dies ist indessen keinesweges in der Natur der analytischen Behandlung dieses Gegenstandes begründet, sondern vielmehr nothwendige Folge der beschränkten Ansicht von demselben, nach welcher man, mit Übergehung aller übrigen Relationen, nur denjenigen Formeln nachtrachtet, welche zur numerischen Berechnung der sphärischen Dreiecke dienen. Die numerische Berechnung aber ist ein ganz zufälliger, in der Natur dieser

Lehre nicht begründeter Gesichtspunct, dessen einseitige Verfolgung zu nichts dient, als den Gang der Untersuchung nutzlos zu verwickeln und dunkel zu machen. Das Folgende wird, hoffe ich, zeigen, dafs man, unter gänzlicher Beiseitesetzung jenes Gesichtspunctes, aus der Grundformel ein förmliches System der sphärischen Trigonometrie auf eine so elementare und doch so elegante Weise ableiten kann, dafs billigen Forderungen dadurch genügt werden dürfte.

Zu möglichster Abkürzung mögen im Folgenden nur solche Dreiecke in Betrachtung kommen, deren Winkel und Seiten sämmtlich kleiner als 2 Rechte sind, was die Allgemeinheit der Sätze über die Polardreiecke bekanntlich nicht verringert. Bezeichnet man dann die Seiten eines sphärischen Dreiecks mit a, b, c, die denselben gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C: so lehrt die Sphärik, dafs sich jederzeit ein zweites Dreieck finden läfst, dessen Seiten und Winkel, welche a', b', c', A', B', C' heifsen mögen, die Ergänzungen der Winkel Seiten des ersten Dreiecks zu 180 Grad bilden *). Da nun für beide Dreiecke:

$$\left.\begin{matrix} a+b+c \\ a'+b'+c' \end{matrix}\right\} \begin{matrix} >0 \\ <360^\circ \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} a+b \\ a'+b' \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} c \\ c' \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} a+c \\ a'+c' \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} b \\ b' \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} b+c \\ b'+c' \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right.$$

ist, so folgt, wenn man statt a, b, c, und a', b', c' ihre Werthe $180^\circ - A$, B, C, und $180^\circ - A'$, B', C' setzt:

$$\left.\begin{matrix} A+B+C \\ A'+B'+C' \end{matrix}\right\} \begin{matrix} >180^\circ \\ <540^\circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} A+B-C; & A-B+C; & -A+B+C \\ A'+B'-C'; & A'-B'+C'; & -A'+B'+C' \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} < 180^\circ.$$

Es ergiebt sich hieraus, dafs man aus drei ganz willkürlich gewählten Winkeln, wenn auch ihre Summe zwischen 2 und 6 Rechte fällt, doch nicht allemal ein sphärisches Dreieck bilden kann; so wenig als dies mit drei ganz willkürlich gewählten Seiten der Fall ist, wenn ihre Summe auch kleiner als vier Rechte ist. Diese Beschränkung ist den resp. Dreiecken so wesentlich, dafs es wirklich zu verwundern ist, wie sie bisher hat so ganz unbeachtet bleiben können. Ohne Berücksichtigung derselben verfällt man aber in unauflösbare Widersprüche und Schwierigkeiten; wie dies z. B. Hrn. Schmeifser (a. a. O. pag. 131.) mit der Formel

---

*) Es ist Sache der Sphärik, diesen Satz geometrisch für alle möglichen Dreiecksformen zu beweisen. So findet er sich auch in den bessern Lehrbüchern der Trigonometrie, z. B. in Salomon's Handb. der ebenen und sphär. Trig. pg. 245. ff. Er kann aber auch leicht aus der Grundformel (α.) abgeleitet werden.

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2}}{\sin B\sin C}\right)}$$

begegnet ist, welche nur dann eine Ungereimtheit enthalten würde, wenn es möglich wäre, dafs $\frac{1}{2}(-A+B+C)>90°$ werden könnte. Wenn sich daher diese Formel in Vega's math. Vorlesungen ohne das Zeichen — unter dem Wurzelzeichen findet, so ist dies ein offenbarer Fehler, durch den $\sin\frac{1}{2}a$ stets unmöglich werden mufs, da der Cosinus von $\frac{1}{2}(A+B+C)$ stets negativ ist. Ich habe im Folgenden das negative Vorzeichen in dieser und ähnlichen Formeln durch eine geeignete Umformung vermieden, durch welche zugleich in die einander entsprechenden Ausdrücke der Winkel durch die Seiten und umgekehrt mehr Gleichförmigkeit gebracht wird.

§. 4.

Aus der Grundformel (*a.*) erhält man nun, theils unmittelbar, theils durch Hülfe des Polardreieckes, die Ausdrücke:

1. $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}, \qquad \cos a = \frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},$$

welche leicht auf die Winkel B, C, b, c übertragen werden können und die Grundlage aller folgenden bilden. Fügt man zu ihnen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $+1$ hinzu, so ergeben sich bekanntlich die Ausdrücke für die halben Winkel und Seiten:

2.
$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin c},$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b\sin c},$$

$$\tang^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{A+B+C-180°}{2}\sin\frac{-A+B+C+180°}{2}}{\sin B\sin C},$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{A-B+C+180°}{2}\sin\frac{A+B-C+180°}{2}}{\sin B\sin C},$$

$$\tang^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{A+B+C-180°}{2}\sin\frac{-A+B+C+180°}{2}}{\sin\frac{A-B+C+180°}{2}\sin\frac{A+B-C+180°}{2}}.$$

Aus ihnen findet sich durch Multiplication:

$$3.\quad \begin{cases} \sin a = \dfrac{2\sqrt{\left(\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\right)}}{\sin b\sin c}, \\ \sin a = \dfrac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+B+C-180^\circ}{2}\sin\frac{-A+B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A-B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A+B-C+180^\circ}{2}\right)}}{\sin B\sin C}. \end{cases}$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin a$, die zweite mit $\sin A$, so werden die Glieder rechter Hand constant, folglich ist

$$4.\quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = m.$$

Diese Constante m, welche ich den Modulus des Dreieckes nennen will, erscheint in den Relationen der sphärischen Trigonometrie sehr häufig, wenn Functionen der Winkel durch Functionen der Seiten dividirt werden, und vereinfacht weitläufige und zusammengesetzte Formeln oft auf eine merkwürdige Weise. Aus (3.) erhält man für dieselbe:

$$5.\quad m = \frac{4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{4\sin\frac{A+B+C-180^\circ}{2}\sin\frac{-A+B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A-B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A+B-C+180^\circ}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+B+C-180^\circ}{2}\sin\frac{-A+B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A-B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A+B-C+180^\circ}{2}\right)}}{\sin a\sin b\sin c}$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{2\sqrt{\left(\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A+B+C-180^\circ}{2}\sin\frac{-A+B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A-B+C+180^\circ}{2}\sin\frac{A+B-C+180^\circ}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b-c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}.$$

Andere Ausdrücke, welche nur zwei Winkel und Seiten enthalten, wie z. B.

$$6.\quad \begin{cases} m = \dfrac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}, \\ m^2 = \dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(a+b)\sin(a-b)} = \dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\cos 2b-\cos 2a}, \end{cases}$$

können aus (4.) in grofser Zahl abgeleitet werden. Mit Hülfe der Gleichung (4.) erhält man auch noch aus (1.) und (2.):

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \dfrac{2\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{m.\sin a\sin b\sin c}, & \operatorname{tang}\frac{a}{2} = \dfrac{2m.\sin\frac{A+B+C-180°}{2}\sin\frac{-A+B+C+180°}{2}}{\sin A\sin B\sin C}, \\ \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \dfrac{m.\sin a\sin b\sin c}{2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}, & \operatorname{tang}\frac{a}{2} = \dfrac{\sin A\sin B\sin C}{2m.\sin\frac{A-B+C+180°}{2}\sin\frac{A+B-C+180°}{2}}, \\ \cot A = \dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{m.\sin a\sin b\sin c}. & \cot A = \dfrac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}. \end{cases}$$

§. 5.

Bildet man nach den Formeln (2.) die analogen für die Sinus und Cosinus der Winkel $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, und multiplicirt je zwei derselben mit einander, so erhält man, durch gehörige Substitution, folgende neue Ausdrücke:

$$8.\quad \begin{cases} \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a}, & \frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{\sin A}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin a}, & \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}{\sin A}, \\ \frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin a}, & \frac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180°)}{\sin A}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a}, & \frac{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180°)}{\sin A}. \end{cases}$$

und aus ihnen, mit Hülfe von (4.), folgende Werthe für den Modulus:

$$9.\quad m = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180°)}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180°)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.$$

Die Division dieser Gleichungen giebt die schon mehr bekannten Formeln:

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}B.\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}, & \operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}B.\cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}, & \operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180°)}{\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180°)}. \end{cases}$$

Die Addition und Subtraction der Formeln (8.) führt zu den sogenannten Gaufsischen Gleichungen:

$$11.\quad \begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}, & \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}, & \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}, \end{cases}$$

welche für den Modulus die Werthe

$$12.\quad m = \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}(b+c)}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}A\ \sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}(b+c)}$$

geben und durch Division die bekannten **Neperschen Analogieen** erzeugen, nemlich:

$$13.\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}, & \tan\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}, \\ \tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}, & \tan\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}\tan\frac{1}{2}A = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\tan\frac{1}{2}a, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\tan\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Diese Art, die Gaufsischen Gleichungen abzuleiten, hat Hr. Prof. **Buzenzeiger** bereits im sechsten Bande von **Lindenau's** und **Bohnenberger's** Zeitschrift für Astronomie bekannt gemacht, und sie scheint mir unter allen bisher gefundenen die natürlichste und eleganteste zu sein.

(Die Fortsetzung folgt.)

5.

Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

(Présenté à l'Académie des sciences de Paris le 2 décembre 1833.)

I.

Dans une note placée à la fin de mon second Mémoire sur la détermination des intégrales de valeur algébrique, j'ai donné l'énoncé d'un théorême relatif à l'intégrale $\int e^x y\,dx$, y étant une fonction algébrique quelconque, à savoir qu'il existe une méthode certaine pour trouver la valeur de cette intégrale toutes les fois qu'elle peut être obtenue en employant un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques, ou du moins pour en démontrer l'impossibilité sous la forme citée. J'ai même indiqué en peu de mots la marche qu'on doit suivre dans la pratique, pour découvrir (lorsqu'elle est possible) la valeur de l'intégrale en question, mais je n'ai point fait connaître les principes théoriques qui servent de base à ma méthode. L'exposition rapide de ces principes fera le sujet du présent mémoire, dans lequel on trouvera, si je ne me trompe, les demonstrations rigoureuses de plusieurs théorêmes nouveaux et d'une grande généralité.

L'idée fondamentale de ces recherches a été publiée pour la première fois dans le Mémoire sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonctions de leur amplitude, que j'ai présenté à l'Académie des sciences de Paris le 24 Juin 1833. Toutefois j'ai cru devoir reprendre ici la chose en son entier, en la complettant sous quelques rapports et en l'étendant à de nouvelles questions.

La première proposition dont je m'occupe est relative à l'intégrale $\int P\,dx$, dans laquelle P désigne une fonction algébrique $f(x, y, z, \ldots.)$ de la variable indépendante x et de plusieurs fonctions de x, savoir y, z, etc. déterminées par un nombre égal d'équations différentielles telles que: $\frac{dy}{dx} =$

une fonction algébrique de x, y, z, *etc.;* $\frac{dz}{dx}$ = *une autre fonction algébrique de* x, y, z, *etc.;* et ainsi de suite. Je cherche quelle forme devra prendre la valeur de $\int P dx$, toutes les fois que cette valeur sera exprimable, sous forme finie, en fonction de x, y, z, etc., à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. Et je démontre ainsi un théorème dont je vais écrire l'énoncé, et qui doit, à mon sens, être considéré comme fondamental dans la théorie de l'intégration des fonctions d'une seule variable.

Théorême. *Si l'intégrale* $\int P dx$ *est exprimable, sous forme finie, en fonction de* x, y, z *etc., à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, il sera toujours permis de poser*

$$\int P dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w;$$

A, B, ... C *étant des constantes, et* t, u, v, ... w *des fonctions algébriques de* x, y, z *etc.*

Ce théorême a lieu quel que soit le nombre des fonctions y, z, etc.; et il ne dépend pas de la nature de ces fonctions qui peuvent être algébriques ou transcendantes. On peut le regarder comme une généralisation de celui qu'on trouve dans le Mémoire sur les fonctions elliptiques cité plus haut, et il se démontre par les mêmes principes.

Si la fonction P et les fonctions égales à $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, etc. sont non seulement algébriques, mais encore rationnelles par rapport à x, y, z, etc., on démontre de plus que les fonctions t, u, v, ... w pourront aussi être regardées comme rationnelles par rapport à ces quantités. Rien n'est plus facile que d'établir ce second théorème (le premier étant admis) en employant la belle méthode exposée par *Abel*, dans le tome 4. du journal de Mr. *Crelle*, page 260.

J'applique ces théorêmes à la fonction particulière $P = e^x y$, y étant une fonction algébrique de x; et je fais voir que si l'integrale $\int e^x y\, dx$ est possible sous forme finie, on aura:

$$\int e^x y dx = e^x(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{n-1}) + \text{Constante},$$

α, β, γ, ... λ étant des fonctions rationnelles de x, et n désignant le degré de l'équation algébrique, à coëfficients rationnels (supposée irréduc-

tible) dont y est la racine. Je fais voir ensuite que les inconnues α, β, γ, ... λ doivent satisfaire à un nombre égal d'équations linéaires du premier ordre; et dès lors, à l'aide de la méthode que j'ai donnée ailleurs pour déterminer les intégrales rationnelles des équations linéaires, on trouve aisément les valeurs de α, β, γ, ... λ, ou du moins on en démontre l'impossibilité, ce qui entraine l'impossibilité de l'intégrale elle-même. Cette méthode s'étend tout de suite à la formule différentielle $e^p y\,dx$, quelle que soit la fonction algébrique p, pourvu que p ne soit pas une simple constante; en effet ce dernier cas, où la fonction qu'on veut intégrer cesse d'être transcendante, est cependant plus compliqué que les autres et parait dépendre d'une analyse plus profonde que celle dont je me sers dans ce Mémoire.

Soient à présent P, Q, ... R des fonctions algébriques quelconques de x; et p, q, ... r d'autres fonctions algébriques qui ne se réduisent pas à des constantes; il sera aisé de traiter l'integrale

$$\int dx(Pe^p + Qe^q + ... + Re^r);$$

car je prouve que, pour que cette intégrale soit possible, chaque terme doit être intégrable en particulier. Il est bon d'avertir que ce dernier théorême suppose que parmi les différences $p-q$, $p-r$, $q-r$, etc. aucune n'est indépendante de x. Cela est permis; car si l'on avait $q = p+k$, k étant une constante, on aurait aussi

$$Pe^p + Qe^q = e^p(P + Qe^k),$$

et les deux termes Pe^p, Qe^q se confondraient en un seul de même forme.

Tels sont les résultats principaux auxquels j'arrive dans ce Mémoire. Mais, pour en rendre la démonstration facile à suivre, il convient de reprendre les choses de plus haut et de poser d'abord quelques définitions.

II.

On appelle *fonction algébrique* d'une ou de plusieurs variables x, y, z, etc., toute fonction X qui peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme:

$$X^m + PX^{m-1} + QX^{m-2} + ... + RX + S = 0,$$

P, Q, ... R, S étant des fonctions rationnelles de x, y, z, etc., et m désignant un nombre entier positif. Il importe peu que cette équation soit ou non résoluble par radicaux.

On donne en général le nom de *fonctions transcendantes* à toutes les fonctions qui ne sont pas comprises dans la définition précédente; mais il ne sera question dans ce Mémoire que des exponentielles et des logarithmes, à quoi il serait inutile d'ajouter les fonctions trigonométriques, tant directes qu'inverses, puisque les sinus et cosinus peuvent s'exprimer en exponentielles, et les arcs de cercle en logarithmes imaginaires, à l'aide de formules très simples connues depuis long-temps.

Les fonctions exponentielles et logarithmiques, qui sont inverses l'une de l'autre, diffèrent essentiellement des fonctions algébriques, en sorte que si p désigne une fonction algébrique de x, e^p et $\log p$ seront toujours des fonctions transcendantes de cette variable. Voici une démonstration nouvelle de cette proposition connue. D'abord en faisant usage de la méthode que j'ai exposée ailleurs *), on prouve aisément que la quantité $\int \frac{dx}{x}$ ou $\log x$ n'est point exprimable en fonction algébrique de x. On voit ensuite qu'il en est de même de $\log p$; car si l'on avait $\log p =$ *une fonction algébrique de* x, en posant $p = y$ et résolvant cette dernière équation par rapport à x, on en déduirait $x =$ *une fonction algébrique* de y, puis $\log y =$ *une fonction algébrique* de y, ce qui est absurde. De même si l'on avait $e^p = q$, q étant algébrique, il en résulterait $\log q = p$, ce dont on vient de montrer l'impossibilité.

Relativement à l'exponentielle e^p, on peut même prouver l'impossibilité de toute équation de la forme

$$Pe^{\alpha p} + Qe^{\beta p} + \ldots + Re^{\gamma p} = S,$$

p, P, Q, ... R, S désignant des fonctions algébriques de x, et α, β, ... γ des quantités numériques quelconques différentes entr'elles et de zéro. D'après ce qu'on vient de voir, cette équation est impossible lorsque le premier membre se compose d'un seul terme. Supposons donc qu'elle soit absurde lorsque le nombre des termes est égal à μ, et prouvons qu'il en sera de même si ce nombre devient égal à $\mu+1$. Cela fait, le théorême que nous avons en vue sera démontré.

Or si, en supposant $\mu+1$ termes dans le premier membre, on pouvait avoir

$$Pe^{\alpha p} + Qe^{\beta p} + \ldots + Re^{\gamma p} = S,$$

*) Voyez le 22ème cahier du Journal de l'Ecole politechnique, ou le Tome 10. du journal de Mr. *Crelle*, page 347.

sans que les quantités P, Q, ... R, S fussent nulles, comme en différenciant cette équation, on trouve:

$$e^{\alpha p}\left(\alpha P\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}\right)+e^{\beta p}\left(\beta Q\frac{dp}{dx}+\frac{dQ}{dx}\right)+\text{etc.}=\frac{dS}{dx},$$

on pourrait, par le secours de cette dernière égalité combinée avec la première, éliminer $e^{\alpha p}$, ce qui s'effectuerait toute de suite en multipliant celle-ci par $\alpha P\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}$, celle là par P, et les retranchant l'une de l'autre. On tomberait ainsi sur une équation ne renfermant plus que μ termes exponentiels dans son premier membre et par conséquent impossible dans l'hypothèse admise. Donc l'équation

$$Pe^{\alpha p}+Qe^{\beta p}+\ldots.+Re^{\gamma p}=S,$$

l'est aussi, ce qu'on voulait prouver. Cette conclusion suppose toutefois que dans l'égalité obtenue par l'élimination de $e^{\alpha p}$, les coëfficients des divers termes ne sont pas nuls séparément. Or, par exemple, après cette élimination, le coëfficient de $e^{\beta p}$ est:

$$P\left(\beta Q\frac{dp}{dx}+\frac{dQ}{dx}\right)-Q\left(\alpha P\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}\right).$$

Si donc il pouvait être nul, c'est qu'on aurait:

$$\frac{d(Pe^{\alpha p})}{Pe^{\alpha p}}=\frac{d(Qe^{\beta p})}{Qe^{\beta p}};$$

d'où l'on déduirait (en désignant par C une constante):

$$e^{(\alpha-\beta)p}=\frac{CQ}{P},$$

ce qui est absurde, puisque les deux nombres α, β sont supposés inégaux. Bien entendu que, dans ce qui précède, p n'est jamais une simple constante.

Si, pour abréger, nous indiquons en général par $\varpi(x)$ une fonction algébrique de x, les fonctions simples que nous considérons plus spécialement dans ce Mémoire et dont toutes les autres seront formées, se réduiront à trois, exprimées par les caractéristiques $\varpi(x)$, e^x, $\log x$. Nous nommerons *fonction finie de* x, y, z, *etc.* toute fonction qui pourra s'écrire en employant ces caractéristiques un certain nombre de fois, ou, si l'on veut, toute fonction dont la valeur pourra être obtenue à l'aide d'un nombre limité quelconque d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques effectuées sur x, y, z, etc.

Une fonction finie pourra, comme on voit, être algébrique ou transcendante; et de plus, dans ce dernier cas, elle appartiendra à une espèce ou à une autre, suivant la nature des transcendantes que cette fonction renferme. En effet nous dirons qu'une fonction finie est *transcendante de première espèce*, si les signes relatifs aux opérations exponentielles et logarithmiques ne portent que sur des fonctions algébriques, comme dans cet exemple,

$$x^3 + \log(1+x^2) + e^{x\sqrt{x}} \log(1+x^3).$$

D'après cette définition, qui s'étend d'elle-même aux fonctions de plusieurs variables, on conçoit que toute fonction finie de x, y, z, appartenant à la première espèce, ne pourra être qu'une fonction algébrique de x, y, z, d'un certain nombre de logarithmes de la forme $\log u$ et d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^u, u étant algébrique par rapport à x, y, z.

Nous dirons qu'une fonction est *transcendante de seconde espèce*, si les signes relatifs aux opérations transcendantes portent sur des quantités algébriques et sur des trancendantes de première espèce, comme dans cet exemple

$$x + \log x + \log(1+e^x).$$

De même une fonction appartiendra à la troisième espèce, si les signes relatifs aux opérations transcendantes portent sur des fonctions de seconde espèce; et ainsi de suite

III.

Ces définitions une fois rappelées, on peut énoncer d'une manière plus précise l'objet du théorême fondamental qui sert de base à nos recherches. Soient pour cela y et z deux fonctions de x déterminées par deux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dz}{dx} = q,$$

p et q désignant deux fonctions algébriques de x, y, z. Désignons par P une autre fonction algébrique des mêmes quantités x, y, z; et considérons l'intégrale $\int P\,dx$. Il est clair que, dans certains cas, l'intégrale en question pourra être regardée comme une fonction finie de x, y, z, et que, dans une multitude d'autres cas, elle sera impossible sous cette forme. Cela posé, le théorême que je veux démontrer peut s'énoncer de la manière suivante:

UNIV. OF MICHIGAN Library

Si l'intégrale $\int P dx$ *est une fonction finie de* x, y, z, *on pourra toujours poser:*

$$\int P dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

A, B, ... C étant des constantes et t, u, v, ... w des fonctions algébriques de x, y, z.

Ce théorême peut s'étendre à un nombre quelconque de fonctions y, z, ... déterminées par un nombre égal d'équations différentielles du premier ordre; et nous avons eu soin d'en avertir au commencement de ce mémoire; mais il suffira d'en donner la démonstration dans le cas particulier où il n'y a que deux fonctions, car cette démonstration reste toujours la même quel que soit leur nombre.

Le cas particulier où l'intégrale serait exprimable algébriquement est compris dans la proposition précédente dont il se déduit en posant $A = 0$, $B = 0$, ... $C = 0$. Maintenant nous allons prouver 1°. que si l'intégrale cherchée est une fonction transcendante de première espèce, de x, y, z, elle pourra toujours être écrite sous la forme énoncée; 2°. que si cette intégrale ne peut être exprimée par aucune fonction transcendante de première espèce, elle ne pourra pas non plus être équivalente à une fonction de seconde espèce, ni d'espèce superieure. Ces deux propositions une fois établies, il est incontestable que notre théorême le sera aussi.

IV.

Première partie de la démonstration *où l'on prouve que si l'intégrale* $\int P dx$ *est équivalente à une fonction transcendante de* x, y, z, *de première espèce, on pourra toujours la supposer mise sous la forme:*

$$\int P dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w.$$

D'après l'hypothèse admise, l'intégrale $\int P dx$ doit être régardée comme une fonction algébrique de x, y, z, d'un certain nombre de logarithmes de la forme $\log u$, et d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^u, u étant algébrique en x, y, z. On peut supposer que le nombre total n de ces transcendantes *monomes* (c'est-à-dire de la forme e^u, $\log u$) a été réduit à son *minimum*. Dès lors il est visible que nulle relation algébrique ne peut exister entr'elles et les variables x, y, z, car une telle relation, fournissant la valeur de l'une de ces transcendantes exprimée al-

gébriquement en fonction des autres et de x, y, z, permettrait de l'éliminer de la valeur de $\int P\,dx$ et de diminuer par conséquent n d'une unité, ce qui est absurde. Pour fixer les idées et rendre notre raisonnement plus sensible, concevons que la valeur de $\int P\,dx$ doive contenir au moins deux exponentielles e^u, e^v et un logarithme $\log w$. On aura donc:

$$\int P\,dx = f(x, y, z, e^u, e^v, \log w)$$

la caractéristique f dénotant une fonction algébrique. Cela posé, si l'on tombe, par un moyen quelconque, sur une équation de la forme:

$$\Phi(x, y, z, e^u, e^v, \log w) = 0$$

dont le premier membre est algébrique par rapport à x, y, z, e^u, e^v, $\log w$ je dis que cette équation ne pourra contenir e^u, e^v, $\log w$ qu'en apparence, en sorte qu'elle subsisterait encore si l'on venait à remplacer e^u, e^v, $\log w$ soit par d'autres fonctions de x tout à fait arbitraires, soit par de simples lettres indéterminées. En effet si cette équation n'était pas *identique* relativement à $\log w$ par exemple, on pourrait en tirer la valeur de $\log w$, et l'on aurait

$$\log w = \varpi(x, y, z, e^u, e^v)$$

ϖ dénotant une fonction algébrique; puis l'on en conclurait

$$\int P\,dx = f(x, y, z, e^u, e^v, \varpi(x, y, z, e^u, e^v))$$

en sorte que la fonction transcendante de première espèce contenue dans le second membre et équivalente à $\int P\,dx$ ne contiendrait plus que deux transcendantes monomes e^u, e^v, tandis que, par hypothèse, elle devrait en contenir au moins trois e^u, e^v, $\log w$.

Cette démonstration restant la même quel que soit le nombre n des transcendantes monomes renfermées dans $\int P\,dx$, pourvu que n soit le plus petit possible, nous avons droit de dire *que si, par la marche des calculs, on est conduit à une équation algébrique entre x, y, z, et ces transcendantes monomes, on ne troublera pas l'égalité en remplaçant les transcendantes par des fonctions nouvelles prises au hasard ou par des quantités purement littérales.* Ce principe est la base de toute notre théorie.

En partant de là, je prouverai d'abord sans peine que la valeur de $\int P\,dx$ ne peut contenir aucune exponentielle. Car supposons, s'il est possible, qu'elle en renferme une (seule ou avec d'autres) savoir $\theta = e^u$, u étant fonction algébrique de x, y, z; et, pour mettre θ en évidence, écrivons

$$\int P\,dx = f(x, y, z, \theta),$$

f étant une fonction algébrique par rapport à θ, et contenant en outre (algébriquement aussi) d'autres transcendantes *monomes*, en nombre quelconque, dont il est inutile de faire mention. En différenciant l'équation précédente et adoptant la notation de *Lagrange* pour représenter les dérivées partielles par rapport à x, y, z, θ, on aura

$$Pdx = f'_x(x,y,z,\theta)\,dx + f'_y(x,y,z,\theta)\,dy + f'_z(x,y,z,\theta)\,dz + f'_\theta(x,y,z,\theta)\,d\theta.$$

Cette valeur peut s'écrire d'une autre manière. En effet on a d'abord $dy = p\,dx$, $dz = q\,dx$: de plus, en observant que $\theta = e^u$, on trouve

$$d\theta = \theta\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right),$$

c'est-à-dire

$$d\theta = \theta\,dx\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right).$$

En substituant ces valeurs dans celle de Pdx et divisant ensuite par dx, on obtient:

$$P = f'_x(x,y,z,\theta) + pf'_y(x,y,z,\theta) + qf'_z(x,y,z,\theta) + \theta f'_\theta(x,y,z,\theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right).$$

L'équation que je viens decrire est algébrique par rapport à x, y, z, θ et par rapport aux autres transcendantes monomes implicitement contenues dans la fonction f: il résulte de là qu'on peut y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante indéterminée quelconque, ce qui donne:

$$P = f'_x(x,y,z,\mu\theta) + pf'_y(x,y,z,\mu\theta) + qf'_z(x,y,z,\mu\theta) + \mu\theta f'_{\mu\theta}(x,y,z,\mu\theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right),$$

égalité dont le second membre est précisément la différentielle complète $df(x,y,z,\mu\theta)$ divisée par dx.

En égalant cette valeur de P à la précédente, puis multipliant par dx et intégrant, on a donc:

$$f(x,y,z,\mu\theta) = f(x,y,z,\theta) + C.$$

Afin de déterminer la constante C, admettons que, pour $x = b$, on ait $y = g$, $z = h$, et $\theta = a$, c'est-à-dire:

$$f(b,g,b,\mu a) = f(b,g,h,a) + C.$$

Il viendra en éliminant C:

$$f(x,y,z,\mu\theta) - f(b,g,h,\mu a) = f(x,y,z,\theta) - f(b,g,h,a).$$

Je différencie cette équation par rapport à μ et je pose ensuite $\mu = 1$: j'obtiens:

$$\theta f'_\theta(x, y, z, \theta) - a f'_a(b, g, h, a) = 0.$$

Mais cette égalilité nouvelle, étant algébrique par rapport à θ et aux autres transcendantes monomes contenues dans la valeur de $\int P dx$, doit substiter encore si l'on remplace θ par une lettre indéterminée i, ce qui donne:

$$f'_i(x, y, z, i) = \frac{a f'_a(b, g, h, a)}{i}.$$

Multipliant par di et intégrant, puis déterminant la constante arbitraire par la considération d'une valeur particulière de i telle que $i = i_0$ on trouve:

$$f(x, y, z, i) = a f'_a(b, g, h, a)(\log i - \log i_0) + f(x, y, z, i_0).$$

Mais cette dernière équation subsiste quel que soit i: on peut donc y faire $i = \theta = e^u$, et à cause de $f(x, y, z, \theta) = \int P dx$, il vient alors:

$$\int P dx = a f'_a(b, g, h, a)(u - \log i_0) + f(x, y, z, i_0),$$

égalité dont le second membre ne contient plus l'exponentielle θ qu'on supposait devoir entrer dans la valeur de $\int P dx$. Ce second membre renferme évidemment une transcendante monome de moins que $f(x, y, z, \theta)$, savoir la transcendante θ, ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, le nombre des transcendantes contenues dans $f(x, y, z, \theta)$ ne peut plus diminuer. L'absurdité provient de ce qu'on a regardé la valeur de $\int P dx$ comme renfermant une ou plusieurs exponentielles. Donc il n'y a réellement aucune exponentielle qui puisse entrer dans l'expression de cette intégrale.

Maintenant je dis que chaque logarithme entrant dans la valeur de $\int P dx$ ne peut s'y trouver que sous forme linéaire et avec un coëfficient constant. Soit en effet $\theta = \log u$ un de ces logarithmes, et, pour le mettre en évidence, posons encore:

$$\int P dx = f(x, y, z, \theta),$$

la fonction f étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres logarithmes qu'elle est implicitement supposée contenir. En différenciant cette équation, on aura

$$P dx = f'_x(x, y, z, \theta) dx + f'_y(x, y, z, \theta) dy + f'_z(x, y, z, \theta) dz + f'_\theta(x, y, z, \theta) d\theta.$$

Mais on sait que $dy = p dx$, $dz = q dx$: de plus l'égalité $\theta = \log u$ donne

$$d\theta = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right),$$

c'est-à-dire

$$d\theta = \frac{dx}{u}\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + p\frac{du}{dz}\right).$$

En divisant la valeur de Pdx par dx, pour obtenir celle de P, on trouvera donc:

$$P = f'_x(x, y, z, \theta) + pf'_y(x, y, z, \theta) + qf'_z(x, y, z, \theta) + \frac{1}{u} f'_\theta(x, y, z, \theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right):$$

Or l'équation que nous venons d'écrire est évidemment algébrique par rapport à x, y, z θ, et par rapport aux autres logarithmes entrant dans $f(x, y, z, \theta)$. Donc on peut y remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante quelconque. Il vient ainsi:

$$P = f'_x(x, y, z, \mu+\theta) + pf'_y(x, y, z, \mu+\theta) + qf'_z(x, y, z, \mu+\theta) + \frac{1}{u} f'_\theta(x, y, z, \mu+\theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right),$$

et on peut observer que le second membre de cette équation n'est autre chose que la différentielle complète de $f(x, y, z, \mu+\theta)$ divisée par dx.

Egalant cette valeur de P à la précédente, puis multipliant par dx et intégrant, on a donc

$$f(x, y, z, \mu+\theta) = f(x, y, z, \theta) + C.$$

Si l'on désigne par g, h, a les valeurs respectives de y, z, θ pour $x = b$, on déterminera aisément, à l'aide de ces valeurs, la constante arbitraire C, et il viendra

$$f(x, y, z, \mu+\theta) = f(x, y, z, \theta) + f(b, g, h, \mu+a) - f(b, g, h, a).$$

Je différencie cette égalité par rapport à μ, après quoi je pose $\mu = 0$: de plus, pour abréger, je fais $f'_a(b, g, h, a) = A$: je trouve de cette manière:

$$f'_\theta(x, y, z, \theta) = A.$$

Comme cette équation est une équation algébrique entre x, y, z, θ et les autres logarithmes contenus dans $f(x, y, z, \theta)$, elle doit subsister en remplaçant θ par une lettre indéterminée i, ce qui donne:

$$f'_i(x, y, z, i) = A.$$

Multipliant par di et intégrant, puis déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$, on obtient

$$f(x, y, z, i) = Ai + f(x, y, z, i_0) - Ai_0.$$

Maintenant on peut donner à i la valeur qu'on veut. Je fais donc $i = \log u$, afin que le premier membre devienne égal à $\int P\,dx$, et j'arrive ainsi à l'égalité remarquable

$$\int P\,dx = A\log u + f(x, y, z, i_0) - Ai_0,$$

d'où il résulte que $\log u$ ne peut entrer dans la valeur de $\int P\,dx$ que sous forme linéaire et avec un coëfficient constant. La même démonstration est applicable aux autres logarithmes $\log v$, ... $\log w$ que l'on supposera contenus dans la valeur de notre intégrale. Donc enfin cette intégrale, dans les hypothèses admises, peut être écrite sous la forme:

$$P\,dx = t + A\log u + B\log v + \ldots + C\log w,$$

ce qui démontre la première partie de notre théorême.

V.

Seconde partie de la démonstration *ou l'on prouve que si l'intégrale* $\int P\,dx$ *ne peut être exprimée par aucune fonction transcendante de première espèce, elle ne pourra pas davantage être exprimée par une fonction transcendante de* $m^{\text{ième}}$ *espèce* m *étant* > 1.

Si l'intégrale $\int P\,dx$ est équivalente à une fonction transcendante de de $m^{\text{ième}}$ espèce, l'expression de cette intégrale contient algébriquement un certain nombre n de transcendantes *monomes* de $m^{\text{ième}}$ espèce, c'est-à-dire un certain nombre n de transcendantes de la forme e^u, $\log u$, u étant une fonction finie de $(m-1)^{\text{ième}}$ espèce. On peut toujours supposer que le nombre n est réduit à son *minimum*, c'est-à-dire supposer que l'intégrale $\int P\,dx$ ne puisse être exprimée par aucune fonction finie de $m^{\text{ième}}$ espèce, dans laquelle il entrerait moins de n transcendantes *monomes* de $m^{\text{ième}}$ espèce. Dès lors il est visible que nulle relation algébrique ne pourra exister entre $x, y, z,$ ces n transcendantes, et d'autre transcendantes d'ordre inférieur, quelles qu'elles soient. Cette relation en effet fournirait la valeur d'une de ces transcendantes, exprimée algébriquement en fonction des autres, et permettrait par conséquent, en portant cette valeur dans celle de $\int P\,dx$, de diminuer le nombre n d'une unité, ce qui est impossible. Cela posé, on voit que les transcendantes de $m^{\text{ième}}$ espèce jouissent ici de toutes les propriétés dont jouissaient, dans le No. précédent, les transcendantes de première espèce, en sorte que, par des raisonnements semblables à ceux du No. IV., on peut prouver:

1°. que la valeur de $\int P\,dx$ ne contient aucune exponentielle de $m^{\text{ième}}$ espèce;

2°. que les logarithmes de $m^{\text{ième}}$ espèce, qui s'y trouvent, n'y peuvent entrer que sous forme linéaire et avec des coëfficients constants.

Par conséquent la valeur de $\int P\,dx$ peut être écrite ainsi:

$$\int P\,dx = T + A\log U + B\log V + \ldots + C\log W,$$

$T, U, V, \ldots W$ désignant des fonctions transcendantes d'espèce inférieure à la $m^{\text{ième}}$.

Maintenant, pour atteindre notre but, il suffit de faire voir que nulle des fonctions $U, V, \ldots W$ ne peut appartenir à la $(m-1)^{\text{ième}}$ espèce; car il en résultera, comme conséquence immédiate, que la valeur de $\int P\,dx$ n'appartient pas à la $m^{\text{ième}}$ espèce, contradictoirement à notre hypothèse.

Or, quelles que soient les transcendantes monomes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce contenues dans $T, U, V, \ldots W$, je puis toujours admettre qu'elles ont été réduites au plus petit nombre possible, en sorte que nulle relation algébrique ne puisse exister entr'elles et des transcendantes d'ordre inférieur.

Cela posé, je dis d'abord que les fonctions $T, U, V, \ldots W$ ne peuvent renfermer aucune exponentielle de la forme e^u, u étant de $(m-2)^{\text{ème}}$ espéce. En effet s'il y a une telle exponentielle (seule ou avec d'autres) désignons la par θ; et pour la mettre en évidence, posons:

$$\int P\,dx = f(x, y, z, \theta)$$

en remplaçant, pour abréger, par $f(x, y, z, \theta)$ la quantité

$$T + A\log U + B\log V + \ldots + C\log W.$$

La fonction $f(x, y, z, \theta)$ n'est point algébrique par rapport à θ et aux autres transcendantes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce que renferment $T, U, V, \ldots W$; mais en différenciant l'égalité précédente et observant que $dy = p\,dx$, $dz = q\,dx$, on trouvera:

$$P = f'_x(x, y, z, \theta) + pf'_y(x, y, z, \theta) + qf'_z(x, y, z, \theta) + \theta f'_\theta(x, y, z, \theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right);$$

et il est visible (à cause des coëfficients constants $A, B, \ldots C$ dont les logarithmes $\log U, \log V, \ldots \log W$ sont affectés dans la fonction $f(x, y, z, \theta)$) que cette équation nouvelle contiendra algébriquement toutes les transcendantes dont il s'agit, transcendantes entre lesquelles il ne peut exister cependant aucune relation de la forme citée. De là, par un raisonnement semblable à celui du No. IV., on conclura que l'équation doit subsister en remplaçant, dans son second membre, θ par $\mu\,\theta$, μ étant un

nombre constant quelconque. Si l'on effectue cette substitution, qu'on égale la nouvelle valeur de P à l'ancienne, puis qu'on intègre, il viendra:

$$f(x, y, z, \mu\theta) = f(x, y, z, \theta) + C.$$

Soient g, h, a les valeurs respectives de y, z, θ pour $x = b$. En déterminant la constante arbitraire C à l'aide de ces valeurs particulières, on aura:

$$f(x, y, z, \mu\theta) = f(x, y, z, \theta) + f(b, g, h, \mu a) - f(b, g, h, a).$$

Je différencie cette équation par rapport à μ et je pose $\mu = 1$ après la différenciation, ce qui me donne

$$\theta f'_\theta(x, y, z, \theta) = a f'_a(b, g, h, a).$$

D'après la forme de la fonction f, l'équation que je viens d'écrire contient algébriquement la transcendante θ et les autres transcendantes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce renfermées dans T, U, V, ... W, ce qui permet de remplacer θ par une lettre indéterminée i et fournit l'égalité

$$f'_i(x, y, z, i) = \frac{a f'_a(b, g, b, a)}{i}.$$

Je multiplie les deux membres par di, et, après les avoir intégrès, je détermine la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$ prise à volonté. Cela me donne:

$$f(x, y, z, i) = a f'_a(b, g, h, a)(\log i - \log i_0) + f(x, y, z, i_0).$$

Observant donc que i est arbitraire, je fais $i = e^u = \theta$: le premier membre devient $\int P dx$ et j'obtiens:

$$\int P dx = a f'_a(b, g, h, a)(u - \log i_0) + f(x, y, z, i_0),$$

équation dont le second membre ne contient pas l'exponentielle θ qu'on supposait devoir entrer dans l'expression de $\int P dx$. Le nombre des transcendantes monomes, de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, contenues dans T, U, V, ... W, se trouve ainsi diminué d'une unité; ce qui est absurde. Il est rigoureusement prouvé par là que les fonctions T, U, V, ... W ne peuvent contenir aucune exponentielle de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce.

Si donc on persiste à soutenir que la valeur de $\int P dx$ est une transcendante de $m^{\text{ème}}$ espèce, on sera obligé de prétendre que les fonctions U, V, ... W contiennent un ou plusieurs logarithmes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, ce dont je vais montrer l'impossibilité. En effet soit, par exemple, $\theta = \log u$ un de ces logarithmes, u étant une fonction de $(m-2)^{\text{ème}}$ espèce; et, pour le mettre en évidence, posons

$$\int P dx = f(x, y, x, \vartheta)$$

en désignant, pour abréger, par $f(x, y, z, \theta)$ la quantité

$$T + A \log U + B \log V + \ldots + C \log W.$$

La fonction $f(x, y, z, \theta)$ n'est point algébrique par rapport à θ; mais sa différentielle est évidemment algébrique par rapport à cette quantité. De plus on peut supposer que le nombre tolal des logarithmes semblables à θ, c'est-à-dire de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, entrant dsns les fonctions T, U, V, ... W se trouve réduit à son *minimum*, en sorte qu'il ne puisse exister aucune relation algébrique entre ces logarithmes, les variables x, y, z, et des transcendantes, quelles qu'elles soient, d'espèce inférieure à la $(m-1)^{\text{ème}}$. Cela posé, en différenciant l'équation

$$\int P dx = f(x, y, z, \theta)$$

et observant que $dy = p dx$, $dz = q dx$, on a:

$$P = f'_x(x, y, z, \theta) + p f'_y(x, y, z, \theta) + q f'_z(x, y, z, \theta) + \frac{1}{u} f'_\theta(x, y, z, \theta)\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right).$$

Cette équation étant algébrique par rapport à θ et aux autres logarithmes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, ne cessera pas d'exister si l'on remplace, dans le second membre, θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante indéterminée. Faisant cette substitution, égalant entr'elles les deux valeurs de P ainsi obtenues, puis intégrant, il vient

$$f(x, y, z, \mu\theta) = f(x, y, z, \theta) + \text{Constante.}$$

Soient g, h, a les valeurs respectives de y, z, θ pour $x = b$: en déterminant la constante à l'aide de ces valeurs, nous aurons:

$$f(x, y, z, u + \theta) = f(x, y, z, \theta) + f(b, g, h, \mu + a) - f(b, g, h, a).$$

Je différencie par rapport à μ et je pose ensuite $\mu = 0$, ce qui me donne:

$$f'_\theta(x, y, z, \theta) = f'_a(b, g, h, a).$$

Cette équation est, comme on peut aisement s'en assurer, algébrique par rapport à θ et aux autres logarithmes de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, d'où résulte, par le raissonnement déjà répété plusieurs fois, qu'on peut y mettre au lieu de θ une lettre indéterminée i. On a donc:

$$f'_i(x, y, z, i) = f'_a(b, g, h, a).$$

Multipliant par di et intégrant, puis déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$, on obtient:

$$f(x, y, z, i) = f'_a(b, g, h, a)(i - i_0) + f(x, y, z, i_0);$$

faisant donc $i = \theta = \log u$, il vient

$$\int P dx = f'_a(b, g, h, a)(\log u - i_0) + f(x, y, z, i_0).$$

Cette égalité nous prouve que le logarithme de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce, $\log u$, ne peut entrer dans la valeur de $\int P dx$ que sous forme linéaire et avec un coëfficient constant. Donc il ne peut pas être contenu dans les fonctions $U, V \ldots . W$ qui sont affectées de signes logarithmiques. Cette dernière proposition est précisement celle qui nous restait à établir pour montrer que la valeur de $\int P dx$ ne peut jamais être une fonction transcendante de $m^{\text{ième}}$ espèce, m étant > 1. Ainsi la seconde partie de notre théorême est devenue incontestable: et ce théorême lui-même est rigoureusement démontré.

VI.

Jusqu'ici les fonction p, q, P ont été regardées comme des fonctions algébriques quelconques de x, y, z; mais si elles sont en outre rationnelles par rapport à ces variables, notre théorême sera susceptible d'un énoncé plus élégant que voici.

Théorême. *Soit P une fonction rationnelle de la variable indépendante x et des deux quantités y, z déterminées par deux équations différentielles de la forme $dy = p\,dx$, $dz = q\,dx$, p et q étant aussi des fonctions rationnelles de x, y, z: si la valeur de $\int P dx$ est une fonction finie de x, y, z, on pourra toujours poser*

$$\int P dx = t + A \log u + B \log v + \ldots . + C \log w,$$

les fonctions t, u, v, $\ldots . w$ étant non seulement algébriques, mais encore rationnelles par rapport à x, y, z, et A, B, $\ldots . C$ désignant des constantes.

La démonstration de ce théorême (celui du No. III. étant admis) est entièrement semblable à celle qu'on trouve exposée dans un Mémoire d'*Abel*, pour établir une vérité du même genre. Voyez le Journal de Mr. *Crelle*, Tome IV. page 260. Pour abréger, je me dispenserai de la rapporter ici. Je vais maintenant présenter quelques applications assez remarquables de nos théorêmes.

VII.

Soit l'intégrale $\int e^x y\,dx$ dans laquelle y désigne une fonction algébrique quelconque de x. Je me propose de donner une méthode certaine pour trouver la valeur de cette intégrale toutes les fois qu'elle est exprimable par une fonction finie de x, ou, ce qui est la même chose, par une fonction finie de x, y, et e^x, et, dans le cas contraire,

pour en démontrer l'impossibilité sous la forme citée D'abord j'observe que la fonction y peut toujours être régardée comme la racine d'une équation algébrique de la forme:

$$(A.) \qquad y^n + Qy^{n-1} + Ry^{n-2} + \ldots + Sy + T = 0,$$

Q, R, ... S, T étant des fonctions rationnelles de x. On tire de là, en différenciant, une équation de la forme $\frac{dy}{dx} = p$, p étant une fonction rationnelle de x et y. Si de plus on pose $e^x = z$, on aura $\frac{dz}{dx} = z$, en sorte que $\frac{dz}{dx}$ sera aussi une fonction rationnelle de z. Par conséquent si vous faites $P = e^x y = yz$, l'intégrale $\int P\,dx$, égale à $\int e^x y\,dx$ et à $\int yz\,dx$, satisfera aux conditions exigées dans l'énoncé du théorême précédent (voyez No. VI.). Donc si l'intégrale $\int e^x y\,dx$ est exprimable en quantités finies, sa valeur sera nécessairement de la forme $t + A\log u + B\log v + \ldots + C\log w$; t, u, v, ... w étant des fonctions rationnelles de x, y et de z ou e^x. En faisant, pour plus de simplicité

$$t + A\log u + B\log v + \ldots + C\log w = f(x, y, z)$$

les dérivées $f'_x(y, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ seront des fonctions algébriques rationnelles de x, y, z. En outre on aura:

$$\int yz\,dx = f(x, y, z)$$

et parceque $dy = p\,dx$, $dz = z\,dx$, il viendra en différenciant:

$$yz = f'_x(x, y, z) + pf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z).$$

Cette équation est algébrique par rapport aux quantités x, y, z: il résulte de là qu'elle ne doit contenir z qu'en apparence, et qu'elle doit rester satisfaite si l'on remplace z, soit par une autre fonction de x tout à fait arbitraire, soit par une simple lettre indéterminée. Sans cela en effet l'exponentielle $z = e^x$ serait exprimable algébriquement en fonction de x, ce qui est impossible. Soit donc μ une constante indéterminée quelconque, et on aura aussi

$$\mu yz = f'_x(x, y, \mu z) + pf'_y(x, y, \mu z) + \mu z f'_{\mu z}(x, y, \mu z).$$

En combinant cette équation avec la précédente, on en tire aisément:

$$f(x, y, \mu z) = \mu f(x, y, z) + \text{Constante}.$$

Soient $y = b$, $z = c$ les valeurs de y et z pour $x = a$. En déterminant la constante arbitraire, à l'aide de ces valeurs particulières, il viendra:

$$f(x, y, \mu z) = \mu f(x, y, z) + f(a, b, \mu c) - \mu f(a, b, c).$$

Je différencie cette égalité par rapport à μ, après quoi je pose $\mu = 1$, ce qui me donne:

$$zf'_z(x, y, z) = f(x, y, z) + cf'_c(a, b, c) - f(a, b, c),$$

ou, plus simplement:

$$zf'_z(x, y, z) = f(x, y, z) + K,$$

en posant $cf'_c(a, b, c) - f(a, b, c) = K$. On tire de là:

$$f(x, y, z) = zf'_z(x, y, z) - K;$$

donc, puisque la dérivée $f'_z(x, y, z)$ est algébrique et rationnelle par rapport à x, y, z, il en sera de même de la fonction primitive $f(x, y, z)$ égale à $\int e^x y\, dx$.

Actuellement l'équation:

$$zf'_z(x, y, z) = f(x, y, z) + K,$$

étant algébrique par rapport à x, y, z, on peut, d'après ce qu'on a vu plus haut, remplacer z par une lettre indéterminée i, ce qui donne:

$$if'_i(x, y, i) = f(x, y, i) + K.$$

En intégrant par rapport à i cette équation différentielle, et déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$, on trouve:

$$f(x, y, i) = -K - i\left(\frac{K + f(x, y, i_0)}{i}\right).$$

Cette dernière égalité subsiste quel que soit i, et on est maître d'y poser $i = e^x$, auquel cas le premier membre coïncide avec la valeur de $\int e^x y\, dx$. Donc si l'intégrale $\int e^x y\, dx$ est exprimable sous forme finie, on aura:

$$\int e^x y\, dx = -e^x\left(\frac{K + f(x, y, i_0)}{i_0}\right),$$

c'est-à-dire que cette intégrale sera toujours de la forme:

$$\int e^x y\, dx = e^x \cdot \frac{\varphi(x, y)}{F(x, y)} + \text{Constante},$$

$\varphi(x, y)$, $F(x, y)$ étant deux fonctions entières de x et y.

Arrivé à ce point; si l'on observe que les deux quantités y et x sont liées entr'elles par l'équation

$$(A.) \qquad y^n + Qy^{n-1} + Ry^{n-2} + \ldots + Sy + T = 0,$$

on tirera des principes élémentaires de l'algèbre la double conclusion que voici:

1°. qu'il existe toujours un facteur rationnel $\psi(x, y)$ entier par rapport à y et tel que le produit $F(x, y).\psi(x, y)$ se réduise à une simple fonction rationnelle de x, indépendante de y; en sorte que la valeur de $\int e^x y\, dx$, savoir

$$\int e^x y\,dx = e^x \cdot \frac{\varphi(x,y)\psi(x,y)}{F(x,y)\psi(x,y)} + \text{Constante},$$

peut toujours être mise sous une forme entière par rapport à y, et qu'il est permis de poser en conséquence:

$$\int e^x y\,dx = e^x(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\ldots.) + \text{Constante}.$$

α, β, γ, ... étant des fonctions rationnelles de x;

2°. qu'on peut ensuite, à l'aide de l'équation (*A.*), éliminer de la valeur de notre intégrale toutes les puissances de y dont l'indice est $>n-1$, ce qui la réduit à la forme:

$$\int e^x y\,dx = e^x(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\ldots.+\lambda y^{n-1}) + \text{Constante}.$$

laquelle s'accorde parfaitement avec le théorême énoncé à la fin de mon second mémoire sur la détermination des intégrales de valeur algébrique.

Maintenant il est aisé de déterminer les inconnues, α, β, γ, ... λ qui doivent être des fonctions rationnelles de x, ou au moins d'en prouver l'impossibilité sous la forme cité, ce qui entrainera l'impossibilité de l'intégrale elle-même en quantités finies. Pour cela je différencie l'équation précédente, ce qui me donne

$$(B.)\quad \left\{\begin{array}{l} y-\alpha-\beta y-\gamma y^2-\ldots.-\lambda y^{n-1} \\ -\frac{d\alpha}{dx}-y\frac{d\beta}{dx}-y^2\frac{d\gamma}{dx}-\ldots.-y^{n-1}\frac{d\lambda}{dx} \\ -(\beta+2\gamma y+\ldots.+(n-1)\lambda y^{n-2})\frac{dy}{dx} \end{array}\right\} = 0.$$

L'équation (*A.*) différenciée fournit d'autre part:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{n-1}\frac{dQ}{dx}+y^{n-2}\frac{dR}{dx}+\ldots.+y\frac{dS}{dx}+\frac{dT}{dx}}{ny^{n-1}+(n-1)y^{n-2}Q+\ldots.+S}.$$

Cette valeur étant rationnelle en x et y peut être mise sous une forme entière par rapport à y, en multipliant par un facteur convenable les deux termes de la fonction. Cela fait, si l'on effectue ensuite le produit

$$(\beta+2\gamma y+\ldots.+(n-1)\lambda y^{n-2})\frac{dy}{dx},$$

et si l'on en chasse, au moyen de l'équation (*A.*), toutes les puissances de y dont l'indice est $=n$ ou $>n$, on donnera évidemment à ce produit la forme:

$$A+By+Cy^2+\ldots.+Ey^{n-1},$$

A, B, C, ... E étant des fontions rationnelles de x, β, γ, ... λ linéaires par rapport aux inconnues β, γ, ... λ.

D'après cela, l'équation (*B.*) peut être écrite ainsi:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} & y + \frac{d\gamma}{dx} & y^2 + \ldots + \frac{d\lambda}{dx} & y^{n-1} \\ + \alpha + \beta & + \gamma & + \lambda & \\ + A + B & + C & + E & \\ - I & & & \end{array} \right\}$$

Si donc on suppose, ce qui est permis, l'équation (*A.*) irréductible, on conclura de là:

$$(C.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dx} + \alpha + A = 0, \\ \frac{d\beta}{dx} + \beta + B - 1 = 0, \\ \frac{d\gamma}{dx} + \gamma + C = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\lambda}{dx} + \lambda + E = 0; \end{array} \right.$$

car si les coëfficients des diverses puissances de y n'étaient pas nuls séparement, y serait racine d'une équation de degré $n-1$, ce qui ne se peut, l'équation (*A.*) étant irréductible.

A présent les équations (*C.*) sont en nombre n égal à celui des inconnues α, β, γ, ... λ; et ces dernières doivent avoir des valeurs rationnelles en x, si l'intégrale $\int e^x y\,dx$ est exprimable sous forme finie. Tout se réduit donc à chercher si ces équations peuvent ou non être satisfaites par des valeurs rationnelles de α, β, γ, ... λ, problême qu'on réussira toujours à résoudre par les méthodes que j'ai données dans le 22ème cahier du journal de l'Ecole polytechnique, puisque ces équations sont linéaires et à coëfficients rationnels. Or ce problême une fois résolu, on possédera tout ce qu'il est possible de savoir relativement à l'intégration de la formule différentielle $e^x y\,dx$. En effet, ou l'on obtiendra pour α, β, γ, ... λ des valeurs convenables et on aura

$$\int e^x y\,dx = e^x(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{n-1}) + \text{Constante},$$

ou l'on démontrera que ces valeurs n'existent pas, d'où résultera l'impossibilité d'exprimer $\int e^x y\,dx$, sous forme finie, par aucune combinaison, quelle qu'elle soit, des signes algébriques (explicites ou implicites) avec les signes propres aux opérations exponentielles et logarithmiques. Ainsi, par une méthode très directe, se trouve résolu le problême de l'intégration

pour la formule différentielle $e^x y\,dx$, et il est digne de remarque qu'on soit moins avancé par rapport à la simple différentielle algébrique $y\,dx$, laquelle parait plus difficile à traiter que la précédente, quoiqu'elle soit d'un ordre inférieur.

VIII.

On s'assurera aisément par notre méthode que l'intégrale $\int \frac{e^x\,dx}{x}$, dont les Géomètres se sont beaucoup occupés, est impossible sous forme finie, ce qui s'accorde avec le théorême énoncé dans le 22 cahier du journal de l'Ecole polytechnique. J'ai dit aussi dans le journal cité, que les mêmes principes servaient a démontrer l'impossibilité de l'intégrale définie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,dx}{1+\alpha^2}$$

considérée comme fonction de la variable positive x. En effet si l'on pose:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,dx}{1+\alpha^2},$$

on aura:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = -\frac{1}{x};$$

équation dont l'intégrale est de la forme:

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{e^x}{2}\int\frac{e^{-x}\,dx}{x} + \frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^x\,dx}{x},$$

A et B étant deux constantes. Si donc l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,d\alpha}{1+\alpha^2}$ était une fonction finie, il faudrait que la quantité

$$e^x\int\frac{e^{-x}\,dx}{x} - e^{-x}\int\frac{e^x\,dx}{x}$$

fut une fonction finie L. Mais en posant

$$e^x\int\frac{e^{-x}\,dx}{x} - e^{-x}\int\frac{e^x\,dx}{x} = L,$$

et différenciant on a:

$$e^x\int\frac{e^{-x}\,dx}{x} + e^{-x}\int\frac{e^x\,dx}{x} = \frac{dL}{dx}.$$

Or en combinant ces deux égalités, il vient:

$$\int\frac{e^x\,dx}{x} = \frac{e^x}{2}\left(\frac{dL}{dx} - L\right),$$

de sorte que l'intégrale $\int\frac{e^x\,dx}{x}$ serait une fonction finie de x, ce qui n'a pas lieu. Donc l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,d\alpha}{1+\alpha^2}$ est impossible sous forme finie.

IX.

A l'aide de nos méthodes, on intègre encore (toutes les fois que cela est possible sous forme finie) la fonction transcendante très générale

$$(P e^p + Q e^q + \ldots + R e^r)\, dx,$$

dans laquelle P, Q, ... R désignent des fonctions algébriques prises à volonté, et où p, q, ... r représentent des fonctions algébriques quelconques aussi, pourvu qu'elles ne se réduisent pas à de simples constantes.

D'abord il n'y a aucune difficulté dans cette extension, si la fonction qu'on veut intégrer ne se compose que d'un seul terme $Pe^p\,dx$; car, pour ramener la recherche de l'intégrale $\int Pe^p\,dx$ à celle d'une intégrale de la forme $\int e^x y\,dx$, il suffit de changer de variable indépendante et de prendre pour cette variable indépendante p au lieu de x.

Maintenant je vais supposer que la fonction à intégrer se compose de deux termes et qu'elle soit de la forme

$$(P e^p + Q e^q)\, dx.$$

Ce que nous allons dire sur cet exemple suffira pour bien faire comprendre quelle marche on devra suivre, si le nombre des termes est plus considérable.

Soit donc proposé de trouver, lorsque cela est possible en termes finis, la valeur de l'intégrale

$$\int (P e^p + Q e^p)\, dx.$$

Il est visible d'abord qu'on peut faire abstraction du cas particulier où la différence des deux fonctions p et q se réduirait à une constante k. En effet si l'on avait $q = p + k$, on aurait aussi:

$$P e^p + Q e^q = e^p (P + Q e^k);$$

et en posant $P + Q e^k = R$, on n'aurait plus à intégrer que la fonction différentelle $R e^p\,dx$, semblable à celle dont il a été question en tête de ce No.

Ce cas particulier étant exclu ainsi que celui où l'on aurait $p - mq = k$, m et k étant des constantes (duquel on s'occupera tout a l'heure), je vais prouver que nulle relation algébrique ne peut exister entre les trois quantités x, e^p, e^q, ou, en d'autres termes, que l'on ne peut jamais avoir, entre ces trois fonctions de x, une égalité, quelle qu'elle soit, de la forme

$$f(x, e^p\, e^q) = 0,$$

la caractéristique f dénotant une fonction algébrique. En effet, en indi-

quant par la caractéristique nouvelle φ une autre fonction algébrique, et résolvant l'équation par rapport à e^p, on obtiendrait pour cette exponentielle une valeur de la forme

$$e^p = \varphi(x, e^q).$$

Pour abréger, posons $e^q = \theta$; il nous viendra

$$e^p = \varphi(x, \theta).$$

Différenciant et posant pour simplifier $dp = p'\,dx$, $dq = q'\,dx$, on a donc:

$$e^p\,p' = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta\,q',$$

d'ou l'on conclut:

$$p' = \frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta\,q'}{\varphi(x, \theta)}.$$

Mais cette équation, dans laquelle e^p n'entre plus, est algébrique par rapport à x et θ: il résulte de là qu'elle ne doit contenir θ qu'en apparence, et qu'elle doit subsister abstraction faite de la valeur de θ, c'est-à-dire qu'elle subsisterait encore si l'on y remplaçait θ par une autre fonction de x tout a fait arbitraire: sans cela en effet on pourrait la résoudre par rapport à θ et la valeur qu'on en déduirait pour cette exponentielle serait une fonction algébrique de x, chose impossible. Si donc on désigne par μ une constante indéterminée, on pourra écrire $\mu\theta$ au lieu de θ; ce qui donne

$$p' = \frac{\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\,\mu\theta\,q'}{\varphi(x, \mu\theta)}.$$

Egalant cette valeur de p' à la précédente, puis intégrant et déterminant la constante arbitraire au moyen d'une valeur particulière $x = b$ à laquelle répond $\theta = a$, on trouve:

$$\varphi(x, \mu\theta)\,\varphi(b, a) = \varphi(x, \theta)\,\varphi(b, \mu a)$$

Maintenant je différencie les deux membres par rapport à μ, après quoi je posse $\mu = 1$: cela me fournit:

$$\theta\,\varphi'_\theta(x, \theta)\,\varphi(b, a) = a\,\varphi'_a(b, a)\,\varphi(x, \theta).$$

Mais cette équation, dans laquelle entre une seule exponentielle θ, est algébrique par rapport à x et θ: donc elle doit être identique par rapport à cette exponentielle, qu'on peut en conséquence remplacer par une lettre indéterminée i, sans troubler l'égalité. Or en multipliant par di et intégrant l'équation

$$\frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{a\,\varphi'_a(b, a)}{i\,\varphi(b, a)},$$

à laquelle ce raisonnement conduit, et désignant par i_0 une valeur particulière de i qui servira à déterminer la constante arbitraire, on obtient

sans difficulté

$$\varphi(x, i) = \frac{\varphi(x, i_0)}{i_0^m} i^m,$$

égalité où l'on a fait, pour abréger, $\frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} = m$. Cette égalité subsistant quel que soit i, je pose $i = \theta = e^q$, et observant que $\varphi(x, \theta) = e^p$, je trouve:

$$e^p = \frac{\varphi(x, i_0)}{i_0^m} e^{mq},$$

c'est-à-dire:

$$e^{p-mq} = \frac{\varphi(x, i_0)}{i_0^m}.$$

Or $p - mq$ est par hypothèse une véritable fonction de x qui ne se réduit pas à une simple constante. Donc l'équation que nous venons d'écrire, et où $\varphi(x, i_0)$ est algébrique, doit être regardée comme impossible (No. II.). Ainsi en admettant qu'il puisse exister entre e^p et e^q une relation algébrique, on tombe dans une absurdité: donc une telle relation ne peut pas exister.

Ces préliminaires établis, reprenons l'intégrale

$$\int (Pe^p + Qe^q)\, dx.$$

En posant $e^p = y$, $e^q = z$, elle deviendra:

$$\int (Py + Qz)\, dx;$$

et on aura, $\frac{dy}{dx} = p'y$, $\frac{dz}{dx} = q'z$, si l'on continue à faire $dp = p'\,dx$, $dq = q'\,dx$. La quantité qu'on veut intégrer est à présent fonction algébrique de x, y, z, et ces deux dernières quantités sont fournies par des équations différentielles du premier ordre. Donc le théorême fondamental du No. III. est applicable à notre intégrale, en sorte que si la valeur est exprimable en termes finies, on pourra lui donner la forme

$$\int (Py + Qz)\, dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

A, B, ... C étant des constantes, et t, u, v, ... w des fonctions algébriques de x, y, z. Pour abréger, je représente le second membre par $\varphi(x, y, z)$. La fonction $\varphi(x, y, z)$ n'est pas algébrique en x, y, z; mais sa différentielle l'est nécessairement. Cela posé, en différenciant l'équation:

$$\int (Py + Qz)\, dx = \varphi(x, y, z),$$

je trouve:

$$Py + Qz - \varphi'_x(x, y, z) - p'y\,\varphi'_y(x, y, z) - q'z\,\varphi'_z(x, y, z) = 0.$$

Or cette équation nouvelle est algébrique par rapport à x, y, z; et une

telle relation entre ces quantités a été démontrée impossible quelques lignes plus haut. Donc notre équation doit être identique, c'est-à-dire qu'elle subsistera encore si l'on remplace y par μy, μ étant une constante quelconque.

On a donc:

$$\mu Py + Qz - \varphi'_x(x, \mu y, z) - \mu p' y \varphi'_{y\mu}(x, \mu y, z) - q' z \varphi'_z(x, \mu y, z) = 0,$$

d'où l'on déduira, abstraction faite de la constante arbitraire:

$$\mu \int Py\, dx + \int Qz\, dx = \varphi(x, \mu y, z).$$

En joignant cette égalité à l'autre:

$$\int Py\, dx + \int Qz\, dx = \varphi(x, y, z),$$

on en déduira:

$$\int Py\, dx = \frac{\varphi(x, \mu y, z) - \varphi(x, y, z)}{\mu - 1},$$

$$\int Qz\, dx = \frac{\mu\varphi(x, y, z) - \varphi(x, \mu y, z)}{\mu - 1},$$

Donc les valeurs de $\int Py\, dx$ et de $\int Qz\, dx$ sont, chacune en particulier, exprimables sous forme finie, si l'intégrale composée de leur somme est elle-même exprimable sous cette forme.

La conclusion à laquelle nous venons d'arriver ne cessera pas même d'être exacte dans le cas particulier exclu jusqu'ici, c'est-à-dire dans le cas particulier où l'on aurait $p = mq + k$, m et k étant des constantes dont la première n'est point égale à l'unité.

En effet si l'on continue à poser $e^p = y$, $e^q = z$, on verra, comme ci-dessus que l'intégrale $\int (Pe^p + Qe^q)\, dx$ ou $\int (Py + Qz)\, dx$ (si elle est exprimable en quantités finies) peut être mise sous la forme:

$$\int (Py + Qz)\, dx = \varphi(x, y, z),$$

$\varphi(x, y, z)$ étant la représentation abrégée d'une fonction de la forme $t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$. En différenciant on aura comme précédemment:

$$Py + Qz - \varphi'_x(x, y, z) - p' y \varphi'_y(x, y, z) - q' z \varphi'_z(x, y, z) = 0.$$

Cette équation est algébrique par rapport à x, y, z: si donc on se rappelle qu'on a: $z = e^q$, et $y = e^p = e^k . e^{mq}$, on verra qu'il est toujours facile de lui donner la forme:

$$Le^{\alpha q} + Me^{\beta q} + \ldots + Ne^{\gamma q} = T,$$

L, M, ... N, T étant des fonctions algébriques de x, et α, β, ... γ désignant certains nombres connus. Or on a vu (No. II.) qu'une telle

équation est impossible à moins qu'on n'ait: $L = 0$, $M = 0$, ... $N = 0$, $T = 0$; c'est-à-dire à moins qu'elle ne soit identique par rapport à e^q. Il resulte de là que l'équation:

$$Py + Qz - \varphi'_x(x, y, z) - p'y\varphi'_y(x, y, z) - q'z\varphi'_z(x, y, z) = 0,$$

doit aussi être identique par rapport à e^q. Cela posé, soit μ une constante quelconque. En changeant e^q en μe^q, ce qui transforme z en μz et y en $\mu^m y$, le premier membre ne cessera pas d'être égal à zéro, ce qui exige (comme on le voit sans peine) qu'on puisse faire le même changement dans l'équation intégrale

$$\int (Py + Qz)\, dx = \varphi(x, y, z).$$

Ainsi, abstraction faite de la constante arbitraire, on a aussi:

$$\int (P\mu^m y + Q\mu z)\, dx = \varphi(x, \mu^m y, \mu z).$$

De ces deux équations l'on tire:

$$\int Py\, dx = \frac{\varphi(x, \mu^m y, \mu z) - \mu\varphi(x, y, z)}{\mu^m - \mu},$$

$$\int Qz\, dx = \frac{\mu^m \varphi(x, y, z) - \varphi(x, \mu^m y, \mu z)}{\mu^m - \mu};$$

d'où l'on conclut que les deux valeurs de $\int Py\, dx$ et $\int Qz\, dx$ doivent, chacune en particulier, être exprimables sous forme finie.

Il résulte de cette discussion que, pour intégrer la formule différentielle

$$(Pe^p + Qe^q)\, dx,$$

en quantités finies, il faut chercher successivement les valeurs des deux intégrales $\int Pe^p\, dx$, $\int Qe^q\, dx$, ce qui est facile par la méthode du No. VII.: si l'une de ces intégrales est impossible ou si toutes les deux le sont, il en sera de même de l'intégrale démandée. La méthode que nous venons d'exposer sur un exemple s'étend évidemment à la formule différentielle

$$(Pe^p + Qe^q + ... + Re^r)\, dx,$$

quel que soit le nombre des termes irréductibles qui la composent, ce qui constitue peut-être le résultat le plus général qu'on ait obtenu jusqu'aujourdhui dans cette partie de l'Analyse qui traite de l'intégration des fonctions d'une seule variable.

6.
Die Sätze von Fourier und Sturm zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

Der Fouriersche Satz findet sich, unter andern, in der Schrift seines Urhebers „*Analyse des équations determinées par* Fourier, *prem. part. liv. prem.*" Den zweiten Satz hat sein Erfinder Sturm (aus Genf, jetzt zu Paris), in einer der Pariser Akademie der Wiss. am 23. Mai 1829 vorgelesenen Abhandlung vorgetragen, ihn auch im 11. Bande des *Bulletin des sciences math., phys. et chim.* von Ferussac S. 419 etc. (ohne Beweis) mitgetheilt. Einen Beweis des Satzes hat v. Ettinghausen im Jahre 1830, im 7. Bande der Wiener Zeitschrift für Math. und Phys. S. 444 etc. geliefert. Ob die Original-Abhandlung von Sturm gedruckt worden, ist dem Herausgeber des gegenwärtigen Journals nicht bekannt.

Dafs nun der Herausgeber die beiden bereits gedruckten Sätze hier reproducirt: davon ist ihm die Erwägung Anlafs, dafs eines Theils die beiden Sätze, obgleich für die Theorie der Gleichungen ungemein wichtig, noch wenig allgemein bekannt sind, und dafs, andern Theils, wie es scheint, ihre Beweise noch schärfer und klarer sich aussprechen lassen, als es, so viel dem Herausgeber bewufst, bis jetzt geschehen. Er wird sich, indem er die Sätze hier vorbringt, zugleich bemühen, die Beweise derselben in dem Maafse elementar und deutlich zu geben, wie es billigerweise wird geschehen müssen, wenn sie, wie zu hoffen und zu wünschen, in die Lehrbücher übergehen.

Dergleichen Reproductionen schon gedruckter, aber weniger bekannter, mathematischer Sätze liegen übrigens in dem Plane des Journals (man sehe die Vorrede zum 1. Bande, S. 3.), und der Herausgeber wird sich aufserdem über ihre Nützlichkeit gelegentlich ausführlich äufsern. Er glaubt daher, nicht allein das Journal wegen der gegenwärtigen Mittheilung, und wegen ähnlicher, die er, oder Andere, sich etwa erlauben möchten, gerechtfertigt halten, sondern auch hoffen zu dürfen, dafs dergleichen Mittheilungen denjenigen Lesern des Journals, die dasselbe bei ihrem Studio der Mathematik benutzen wollen, angenehm sein werden.

I. Der Fouriersche Satz.

1.

Es sei m eine beliebige ganze, positive Zahl und

$$1.\quad \begin{cases} Fx = y = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} \ldots + p_m; \text{ so, dafs} \\ \partial y = m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + (m-2) p_2 x^{m-2} \ldots + p_{m-1}, \\ \partial^2 y = m(m-1) x^{m-2} + (m-1)(m-2) p_1 x^{m-3} \ldots + p_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial^{m-2} y = m(m-1) \ldots 3 x^2 + (m-1)(m-2) \ldots 2 p_1 x + p_2, \\ \partial^{m-1} y = m(m-1) \ldots 2 x + p_1, \\ \partial^m y = m(m-1) \ldots 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Coëfficienten eines beliebigen dieser Ausdrücke, z. B. die Coëfficienten von $\partial^n y$, in so fern sie nur von m und absoluten Zahlen abhängen, durch μ, μ_1, μ_2, ..., so, dafs

$$2.\quad \partial^n y = \mu x^{m-n} + \mu_1 p_1 x^{m-n-1} + \mu_2 p_2 x^{m-n-2} \ldots + p_{m-n}$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$3.\quad \partial^n y = x^{m-n}\left(\mu + \frac{\mu_1 p_1}{x} + \frac{\mu_2 p_2}{x^2} \ldots \frac{p_{m-n}}{x^{m-n}}\right).$$

In diesem Ausdrucke verschwinden, wenn $x = \pm\infty$ ist, innerhalb der Klammern alle Glieder, bis auf μ; also reducirt sich $\partial^n y$, für $x = \pm\infty$, auf μx^{m-n}, und folglich ist, für $x = \pm\infty$,

$$4.\quad \partial^n y = (\pm\infty)^{m-n}.$$

Also ist

$$5.\quad \begin{cases} \text{für } x = +\infty, & \partial^n y = +\infty \text{ für alle } n, \text{ von } n = m \text{ bis } n = 0, \\ \text{für } x = -\infty, & \partial^n y = \begin{cases} +\infty \text{ für } n = m, m-2, m-4, m-6, \ldots \\ -\infty \text{ für } n = m-1, m-3, m-5, \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Ferner ist für $x = 0$, vermöge (1.),

$$6.\quad y = p_m,\ \partial y = p_{m-1},\ \partial^2 y = p_{m-2},\ \ldots\ \partial^{m-1} y = p_1,\ \partial^m y = m(m-1)\ldots 1.$$

Werden nun ferner die Werthe der Gröfsen y, ∂y, $\partial^2 y$, ... $\partial^m y$, für irgend einen Werth c von x, durch

$$7.\quad y_c,\ \partial y_c,\ \partial^2 y_c,\ \ldots\ \partial^m y_c$$

bezeichnet, und man begreift unter dem Zeichen

$$8.\quad \begin{cases} (x) \text{ die Reihe der Gröfsen } \partial^m y,\ \partial^{m-1} y,\ \partial^{m-2} y,\ \ldots\ y \text{ im allgemeinen,} \\ \quad \text{und unter dem Zeichen} \\ (c) \text{ die Reihe der Gröfsen } \partial^m y_c,\ \partial^{m-1} y_c,\ \partial^{m-2} y_c, \ldots\ y: \end{cases}$$

so folgt aus (5.), dafs

9. **die Reihe $(-\infty)$, oder $\overset{+}{\partial^m y_{-\infty}}$, $\overset{-}{\partial^{m-1} y_{-\infty}}$, $\overset{+}{\partial^{m-2} y_{-\infty}}$, ... $\overset{\pm}{\partial y_{-\infty}}$, $\overset{\mp}{y_{-\infty}}$, die darüber stehenden Zeichen, also lauter Zeichenwechsel,**

die Reihe $(+\infty)$, oder $\overset{+}{\partial^m y_{+\infty}}$, $\overset{+}{\partial^{m-1} y_{+\infty}}$, $\overset{+}{\partial^{m-2} y_{+\infty}}$, ... $\overset{+}{\partial y_{+\infty}}$, $\overset{+}{y_{+\infty}}$, die darüber stehenden Zeichen, also lauter Zeichenfolgen: aus (6.) aber, dafs

die Reihe (0), oder $\partial^m y_0$, $\partial^{m-1} y_0$, $\partial^{m-2} y_0$, ... ∂y_0, y_0, die Zeichen der Coëfficienten $1, p_1, p_2, \ldots p_m$

hat, so, dafs die Reihe $(+\infty)$ immer m Zeichenfolgen mehr hat, als die Reihe $(-\infty)$.

2.

Der Cartesische Satz von den algebraischen Gleichungen lehrt, dafs die Gleichung

$$10. \quad y = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots + p_m = 0$$

nicht mehr reelle negative Wurzeln haben kann, als sich Folgen in den Zeichen der Coëfficienten befinden, mithin, weil die Reihe $(-\infty)$ (9.) lauter Zeichenwechsel, die Reihe (0) dagegen die Zeichen der Coëfficienten selbst hat, nicht mehr reelle negative Wurzeln, als von $(-\infty)$ bis (0) Zeichenwechsel in Zeichenfolgen übergegangen sind; und, ähnlicher Weise: dafs die Gleichung nicht mehr reelle positive Wurzeln haben kann, als sich Wechsel in den Zeichen der Coëfficienten befinden, mithin, weil die Reihe $(+\infty)$ lauter Zeichenfolgen hat, nicht mehr reelle Wurzeln, als von $(+\infty)$ bis (0) Zeichenfolgen in Zeichenwechsel übergehen, oder als die Reihe $(+\infty)$ Zeichenfolgen mehr hat, als die Reihe (0).

Der Fouriersche Satz erweitert dieses Kennzeichen der Grenze der Zahl der reellen Wurzeln einer Gleichung $y = 0$ in Beziehung auf die Werthe von x, zwischen welchen sie liegen können. Er beschränkt sich nicht blofs auf die beiden Werthen-Paare $-\infty$, 0 und 0, $+\infty$ von x, sondern lehrt, dafs allgemein, zwischen einem beliebigen Werthen-Paare a und b von x, wo $b > a$, nicht mehr reelle Wurzeln der Gleichung $y = 0$ liegen können, als die Reihe (a) Zeichenwechsel mehr hat als die Reihe (b). Auch liefert er zugleich Kennzeichen der Existenz imaginairer Wurzeln.

Der Beweis des Satzes, verbunden mit den Kennzeichen der imaginairen Wurzeln, ist im Folgenden enthalten.

3.

Wenn die Werthe eines Polynoms fx, welches, wie oben das Polynom $d^n y$, nur Potenzen von x mit ganzzahligen, positiven Exponenten enthält, für irgend zwei reelle Werthe a und b von x entgegengesetzte Zeichen haben: so muſs, während x von a bis b stetig wächst, und also der Werth von fx, mit x zugleich, stetig sich verändert, dieser Werth von fx wenigstens einmal durch Null gehen, und es muſs daher wenigstens einen, zwischen a und b liegenden, reellen Werth von x geben, für welchen $fx = 0$ ist.

Dieser Satz wird, wie bekannt, auf verschiedene Arten bewiesen; auch ohne denjenigen, daſs fx immer als ein Product einfacher Factoren zu betrachten ist: bloſs aus der Stetigkeit des Wachsthums von x und der Verschiedenheit der Zeichen der Glieder des Polynoms fx. So beweiset ihn z. B. Lagrange, in der 1. Anmerk. zu seiner Theorie der numerischen Gleichungen.

4.

Wenn in y (1.), x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wächst, so müssen von den von y abgeleiteten Gröſsen diejenigen $\partial^{m-1}y$, $\partial^{m-3}y$, $\partial^{m-5}y$, ... einzeln, oder mehrere zugleich, nothwendig wenigstens einmal, und zwar für reelle Werthe von x, den Werth Null annehmen. Jedoch kann solches auch, die abgeleitete $\partial^{m-1}y$ ausgenommen, in ungerader Zahl, öfter geschehen, und auch die übrigen abgeleiteten $\partial^{m-2}y$, $\partial^{m-4}y$, $\partial^{m-6}y$, ... können, in gerader Zahl, mehreremal den Werth Null annehmen.

Denn da die Werthe der sämmtlichen Gröſsen $\partial^{m-1}y$, $\partial^{m-3}y$, $\partial^{m-5}y$, ..., zufolge (9.), für die beiden reellen Werthe $-\infty$ und $+\infty$ von x entgegengesetzte Zeichen haben, so ist von jeder der Werth wenigstens einmal, für irgend einen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden reellen Werth von x, gleich Null (§. 3.); und zwar sind die reellen Werthe von x, für welche $\partial^{m-1}y$, $\partial^{m-3}y$, $\partial^{m-5}y$, ... verschwinden, nothwendig endlich, nicht unendlich groſs, indem unendlich groſse Werthe von x nicht endliche Werthe von $\partial^{m-1}y$, $\partial^{m-3}y$, $\partial^{m-5}y$, ..., und also auch nicht den Werth Null geben können, sondern nur unendlich groſse Werthe, mit dem Zeichen der höchsten in dem Polynome vorkommenden Potenz von x.

Daſs die Gröſsen $\partial^{m-2}y$, $\partial^{m-3}y$, $\partial^{m-4}y$, ... y sämmtlich auch mehrmals, auf die angezeigte Weise, in gerader oder ungerader Zahl, durch Null gehen können, folgt daraus, daſs die Gleichungen $\partial^{m-2}y = 0$, $\partial^{m-3}y = 0$,

$\partial^{m-4}y = 0, \ldots . y = 0$, die, anders wie $\partial^{m-1}y = 0$, sämmtlich von höherem als dem **ersten** Grade sind, auch **mehrere reelle** Wurzeln haben können.

5.

Wenn der Werth eines Polynoms fx, welches, wie y und dessen Abgeleiteten (1.), *nur Potenzen von x mit ganzzahligen, positiven Exponenten enthält, für irgend einen reellen Werth c von x, nicht Null ist: so hat $f(c+z)$, für alle möglichen reellen Werthe von z, die zwischen* 0 *und gewissen endlichen reellen Grenzen $-\tau_1$ und $+\tau_2$ liegen, nothwendig immer mit fc einerlei Zeichen.*

Denn, wenn ν der Exponent und ζ der Coëfficient der höchsten Potenz von x in fx, oder von c in fc, bezeichnet, so, dafs $\partial^\nu fc = \nu.(\nu-1)\ldots.2.\zeta$ ist, so ist, nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$f(c+z) = fc + z\partial fc + \frac{z^2}{2} d^2fc \ldots . + z^\nu \zeta,$$

oder

$$11. \qquad f(c+z) = fc + x\left[\partial fc + \frac{z}{2}\partial^2 fc + \frac{z^2}{2.0}\partial^3 fc \ldots . + z^{\nu-1}\zeta\right].$$

Kein Glied der Reihe rechterhand, ist unendlich grofs. Sie sind alle endlich, und können nur zum Theil Null sein, weil sie c nur in Potenzen von ganzzahligen, positiven Exponenten enthalten. Schreibt man daher (11.) wie folgt:

$$12. \qquad f(c+z) = fc + zP,$$

so bezeichnet P eine **endliche** Gröfse, die sich, mit z zugleich, **stetig** verändert. Für $z = 0$ ist $zP = 0$, und, so wie z, von Null an, in's Positive oder Negative hinein, stetig sich verändert, wird auch der Werth von zP stetig ab- oder zunehmen. Für irgend einen negativen Werth $-\tau_1$ von z, und für irgend einen positiven Werth $+\tau_2$ von z, wird zP vielleicht eine Gröfse erreichen, deren **absoluter** Werth demjenigen von fc (der nicht Null sein sollte) gleich kommt. Alsdann wird also $fc+zP$ entweder $= 2fc$ oder $= 0$ sein, je nachdem die Zeichen von fc und zP einander gleich, oder entgegengesetzt sind. Für alle z aber, die zwischen 0 und $-\tau_1$, und zwischen 0 und $+\tau_2$, also überhaupt zwischen $-\tau_2$ und $+\tau_2$ liegen, und für welche also $fc+zP$ zwischen $2fc$ und 0 liegt, wird nothwendig $fc+zP$ das **nemliche** Zeichen haben, wie fc. Also folgt, wie behauptet wird, dafs der Werth von $f(c+z) = fc+zP$, für alle z, die zwischen $-\tau_1$ und $+\tau_2$ liegen, wo τ_1 und τ_2 gewisse positive **endliche** Werthe haben, immer mit fc einerlei Zeichen hat.

6.

Wenn von einem Polynome fx, wie $\partial^n y$, so wie von seinen $\varepsilon-1$ nächsten Abgeleiteten, die Werthe, für irgend einen reellen Werth c von x, alle, also zusammen die ε von y abgeleiteten Gröfsen $\partial^n y_c$, $\partial^{n+1} y_c$, $\partial^{n+2} y_c$, ... $\partial^{n+\varepsilon-1} y_c$, oder fc, ∂fc, $\partial^2 fc$, ... $\partial^{\varepsilon-1} fc$ zugleich Null sind (was der Fall sein kann, da zufolge (§. 4.) die Gröfsen $\partial^{n-1} y$, $\partial^{n-3} y$, $\partial^{n-5} y$, ... einzeln, jede wenigstens einmal, für irgend einen reellen Werth von x verschwinden müssen, die übrigen Gröfsen $\partial^{m-2} y$, $\partial^{m-4} y$, $\partial^{m-6} y$, ... aber für reelle Werthe verschwinden können), die nächste auf $\partial^{n+\varepsilon-1} y = \partial^{\varepsilon-1} fx$ folgende Abgeleitete $\partial^{n+\varepsilon} y = \partial^{\varepsilon} fx$ dagegen für $x = c$ nicht Null ist, also etwa von $x = c - \tau_1$ bis $x = c + \tau_2$ (wo τ_1 und τ_2 positive endliche Gröfsen bezeichnen) nach (§. 5.) ihr Zeichen nicht ändert: so ist nothwendig das Zeichen aller Werthe von $fx = \partial^n y$, die zu kleineren Werthen von x als c gehören, etwa von $x = c$ bis $x = c - k_1$ (wo k_1 eine positive endliche Gröfse ist) dem Zeichen des Werthes von $\partial^{\varepsilon} fx = \partial^{n+\varepsilon} y$ für $x = c$ entgegengesetzt, wenn ε ungerade, und gleich, wenn ε gerade ist; das Zeichen aller Werthe von fx dagegen, die zu gröfseren Werthen von x als c, etwa von $x = c$ bis $x = c + k_2$, gehören (wo k_2 wieder eine positive endliche Gröfse bezeichnet) ist in allen Fällen, ε sei gerade oder ungerade, dem Zeichen des Werthes von $\partial^{\varepsilon} fx$ für $x = c$ gleich.

Denn, wenn z. B. x und $x+z$ zwei verschiedene Werthe von x bezeichnen, und ν ist der Exponent der höchsten Potenz von x in $fx = \partial^n y$, nemlich $\nu = m - n$; so ist, nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$f(x+z) = fx + z\partial fx + \frac{z^2}{2}\partial^2 fx + \ldots + \frac{z^\nu}{2.3\ldots\nu}\partial^\nu fx,$$

oder auch, weil $\partial^\nu fx = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 2$,

13. $$f(x+z) = fx + z\partial fx + \frac{z^2}{2}\partial^2 fx \ldots \frac{z^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon}\partial^\varepsilon fx + \frac{z^{\varepsilon+1}}{2.3\ldots\varepsilon+1}\partial^{\varepsilon+1} fx \ldots + z^\nu.$$

Es ist also für $x = c$, für welchen Werth von x in dem gegenwärtigen Falle, der Voraussetzung nach, fx, ∂fx, $\partial^2 fx$, ... $\partial^{\varepsilon-1} fx = 0$ sind,

$$f(c+z) = \frac{z^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon}\left(\partial^\varepsilon fc + \frac{z}{\varepsilon+1}\partial^{\varepsilon+1} fc + \frac{z^2}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}\partial^{\varepsilon+2} fc, \ldots + 2.3\ldots\varepsilon z^{\nu-\varepsilon}\right),$$

oder

14. $$f(c+z) = \frac{z^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon}\left[\partial^\varepsilon fc + z\left(\frac{\partial^{\varepsilon+1} fc}{\varepsilon+1} + \frac{z}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}\partial^{\varepsilon+2} fc \ldots + 2.3\ldots\varepsilon z^{\nu-\varepsilon-1}\right)\right].$$

In diesem Ausdrucke ist, nach der Voraussetzung, $\partial^\varepsilon fc$ nicht Null. Die Ableitungen $\partial^{\varepsilon+1} fc$, $\partial^{\varepsilon+2} fc$, ... aber können nur endlich grofs

oder Null, nicht unendlich grofs sein, weil sie c nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthalten. Also ist, wie in (§. 5.), wenn man (15.) wie folgt schreibt:

$$15. \qquad f(c+\varkappa) = \frac{\varkappa^\varepsilon}{2.3....\varepsilon}(\partial^\varepsilon fc + \varkappa P),$$

der Factor P für jeden endlichen Werth von $\varkappa$ eine endliche Gröfse, eben wie es $\partial^\varepsilon fc$ ist. Für $\varkappa = 0$ ist also $\varkappa P = 0$, und wenn $\varkappa$, von 0 ab, sich stetig verändert, wird der Werth von $\varkappa P$ stetig ab- oder zunehmen, folglich, wenn $\varkappa$ positiv wächst, vielleicht für irgend ein endliches, reelles, positives $k_1 = \varkappa$, oder, wenn $\varkappa$ in's negative abnimmt, für irgend ein endliches, reelles, negatives $k_2 = \varkappa$, den Werth von $\partial^\varepsilon fx$, der von $\varkappa$ unabhängig ist, mit gleichem oder entgegengesetztem Zeichen, erreichen. Jedenfalls aber wird, für alle reelle Werthe von $\varkappa$ zwischen 0 und k_1, und zwischen 0 und $-k_2$, also zusammen zwischen k_1 und $-k_2$, der absolute Werth von $\varkappa P$ kleiner sein, als derjenige von $\partial^\varepsilon fc$. Für alle diese Werthe von $\varkappa$ also wird die gesammte Gröfse $\partial^\varepsilon fc + \varkappa P$ das nemliche Zeichen haben, wie $\partial^\varepsilon fc$.

Für jeden negativen Werth von $\varkappa$, der zwischen 0 und $-k_2$ liegt, wird also das Zeichen der Gröfse $f(c+\varkappa)$ (15. oder 14.) nunmehr, weil $\partial^\varepsilon fc + \varkappa P$ mit $\partial^\varepsilon fc$ immer einerlei Zeichen hat, wegen des Factors $\varkappa^\varepsilon$, demjenigen von $\partial^\varepsilon fc$ entgegengsetzt sein, wenn ε ungerade, und gleich, wenn ε gerade ist; für jeden positiven Werth von $\varkappa$ dagegen, zwischen 0 und k_1, wird das Zeichen der Gröfse $f(x+\varkappa)$ demjenigen von $\partial^\varepsilon fc$ immer gleich sein, ε sei gerade oder ungerade; wie es der Satz aussagt.

7.

Wenn wieder, wie im vorigen Paragraphe, von einer der Abgeleiteten $\partial^n y$, in der Reihe (8.), *desgleichen von den nächst höhern Abgeleiteten $\partial^{n+1} y$, $\partial^{n+2} y$, ... $\partial^{n+\varepsilon-1} y$, in dieser Reihe, die Werthe, indem x von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ stetig wächst, für irgend einen reellen Werth c von x alle zugleich verschwinden: so kann solches nicht anders geschehen, als dafs, zuvor, ehe x den Werth c erreicht, in einem gewissen endlichen Abstande k_1 von c, also von $x = c - k_1$ bis $x = c$, die höchste der für $x = c$ verschwindenden Abgeleiteten $\partial^{n+\varepsilon-1} y$ das dem Zeichen der nächsten, nicht verschwindenden, Abgeleiteten $\partial^{n+\varepsilon} y$, entgegengesetzte Zeichen, die nächst-niedrigere, verschwindende*

Abgeleitete $\partial^{n+\varepsilon-2}y$ dagegen das dem Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon}y_c$ gleiche Zeichen angenommen hat, und so abwechselnd weiter, bis zur letzten verschwindenden Abgeleiteten $\partial^n y$ hinauf; desgleichen nehmen nothwendig die verschwindenden Abgeleiteten $\partial^n y$, $\partial^{n+1}y$, $\partial^{n+2}y$, ... $\partial^{n+\varepsilon-1}y$, so wie x über c hinaus wächst, wiederum bis zu einer gewissen endlichen Grenze k_2, also von $x=c$ bis $x=c+k_2$, sämmtlich dasjenige Zeichen an, welches die nächste nicht verschwundene Abgeleitete $\partial^{n+\varepsilon}y$ für $x=c$ hat. Wenn also $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei reelle Größen bezeichnen, die zwischen 0 und k_1 und zwischen 0 und k_2 liegen, so verhält es sich mit dem Zeichen der verschiedenen Abgeleiteten, je nachdem das Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ für $x=c$ + oder − ist, wie folgt:

		$\partial^{n+\varepsilon}y$,	$\partial^{n+\varepsilon-1}y$,	$\partial^{n+\varepsilon-2}y$,	$\partial^{n+\varepsilon-3}y$,	$\partial^{n+\varepsilon-4}y$,	.....	$\partial^n y$,
16.	$(c-\varkappa_1)$	+	−	+	−	+	.....	$\pm$
	(c)	+	0	0	0	0	.....	0
	$(c+\varkappa_2)$	+	+	+	+	+	.....	+
17.	$(c-\varkappa_1)$	−	+	−	+	−	.....	$\mp$
	(c)	−	0	0	0	0	.....	0
	$(c+\varkappa_2)$	−	−	−	−	−	.....	−,

und zwar in so fern $\partial^{n+\varepsilon}y$ selbst von $c-\varkappa_1$ bis $c+\varkappa_2$ das Zeichen nicht ändert, also $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, aufser zwischen 0 und k_1 und zwischen 0 und k_2, auch noch zwischen 0 und τ_1 und zwischen 0 und τ_2, also auch noch zwischen den Grenzen liegend angenommen werden, zwischen welchen, wie vorausgesetzt wurde, $\partial^{n+\varepsilon}y$ nicht Null ist, oder das Zeichen nicht ändert.

Denn für die erste, in den Reihen (c), für $x=a$ verschwindende Abgeleitete $\partial^{n+\varepsilon-1}y$ ist, in Bezug auf $\partial^{n+\varepsilon}y$, $\varepsilon=1$, also ungerade, und folglich ist das Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon-1}y$, ehe diese Abgeleitete verschwinden konnte, nach (§. 6.), nothwendig dem Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ entgegengesetzt gewesen. Für die zweite in den Reihen (c) verschwindende Abgeleitete $\partial^{n+\varepsilon-2}y$ ist, in Beziehung auf $\partial^{n+\varepsilon}y$, $\varepsilon=2$, also grade; folglich ist das Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon-2}y$, ehe diese Abgeleitete verschwand, nach (§. 6.), nothwendig dem Zeichen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ gleich gewesen, und so abwechselnd weiter. Dagegen: so wie x über c hinausrückt, nehmen alle verschwunden gewesenen Abgeleiteten, nach (§. 6.), nothwendig das nemliche Zeichen an, welches $\partial^{n+\varepsilon}y$ für $x=c$ hat.

8.

Wenn von $\partial^{n+\varepsilon}y$ *an, rückwärts, wiederum die* ε *Abgeleiteten* $\partial^{n+\varepsilon-1}y$, $\partial^{n+\varepsilon-2}y$, ... $\partial^{n}y$ *für* $x=c$ *alle zugleich verschwinden, nicht aber* $\partial^{n+\varepsilon}y$ *und* $\partial^{n-1}y$*: so gehen bei dem Durchgange des stetig wachsenden* x *durch* c*, in so fern bei demselben* $\partial^{n+\varepsilon}y$*, eben wie* $\partial^{n-1}y$*, das Zeichen nicht wechselt* (§. 5.).

I. *In dem Falle, wo* $n>0$ *und*

A) ε *ungerade ist:*

α) *nothwendig* $\varepsilon+1$*, also eine gerade Zahl von Zeichenwechseln in eben so viele Zeichenfolgen über, wenn* $\partial^{n+\varepsilon}y$ *und* $\partial^{n-1}y$ *gleiche Zeichen haben;*

β) $\varepsilon-1$*, also wieder eine gerade Zahl von Zeichenwechseln in eben so viele Zeichenfolgen, wenn* $\partial^{n+\varepsilon}y$ *und* $\partial^{n-1}y$ *entgegengesetzte Zeichen haben;*

B) wenn ε *gerade ist*

gehen immer ε*, also abermals eine gerade Zahl von Zeichenwechseln in eben so viele Zeichenfolgen über: welche auch die Zeichen von* $\partial^{n+\varepsilon}y$ *und* $\partial^{n-1}y$ *sein mögen, so, dafs also, in dem Falle* $n>0$*, die Zahl der Zeichenwechsel, welche in Zeichenfolgen übergehen, immer nur gerade sein kann.*

II. *In dem Falle, wenn* $n=0$ *oder* $\partial^{n}y=y$ *ist,*

gehen stets ε *Zeichenwechsel in* ε *Zeichenfolgen über, welches auch das Zeichen von* $\partial^{n+\varepsilon}y$ (*jetzt* $\partial^{\varepsilon}y$) *sein mag; so, dafs also, in dem Falle* $n=0$*, die Zahl der Zeichenwechsel, welche in Zeichenfolgen übergehen, sowohl gerade als ungrade sein kann.*

Den Beweis hiervon machen die Reihen (16.) und (17.) anschaulich. Denn erstlich befindet sich über jeder Null der mittlern Reihe nothwendig links ein Zeichenwechsel, welchem unterhalb der Null, links, eine Zeichenfolge correspondirt. Es gehen also, ohne vorläufig auf das nächste auf $\partial^{n}y$ **folgende Glied** $\partial^{n-1}y$ **zu sehen, weil** ε **Nullen vorhanden sind,** ε **Zeichenwechsel in** ε **Zeichenfolgen über.**

Nun ist, in dem Falle $n=0$**, kein Glied** $\partial^{n-1}y$ **vorhanden, und es kommen also wirklich nur die** ε **Glieder** $\partial^{n+\varepsilon-1}y$, $\partial^{n+\varepsilon-2}y$, ... $\partial^{n}y$ **in**

Betracht. Also folgt für diesen Fall unmittelbar, was der Satz unter (II.) behauptet.

Ist dagegen, in dem Falle (I.) des Satzes, ein Glied $\partial^{n-1}y$ vorhanden: so gehen erstlich wieder ε Zeichenwechsel, die sich über den Nullen, links, befinden, in ε Zeichenfolgen, links, unter den Nullen, über. Ist nun

ε ungerade, so haben nothwendig $\partial^{n+\varepsilon}y$ und $\partial^n y$ über den Nullen entgegengesetzte Zeichen, während sie unter den Nullen gleiche Zeichen bekommen. Ist daher das Zeichen von $\partial^{n-1}y$ demjenigen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ gleich, so kommt über den Nulllen noch ein Zeichenwechsel, und unter den Nullen eine Zeichenfolge hinzu, und folglich gehen in diesem Falle $\varepsilon+1$ Zeichenwechsel in eben so viele Zeichenfolgen über, wie es (1. A. α.) behauptet. Ist dagegen das Zeichen von $\partial^{n-1}y$ demjenigen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ entgegensetzt, so befindet sich über den Nullen eine Zeichenfolge, unter den Nullen dagegen ein Zeichenwechsel mehr. Also gehen in diesem Falle nur $\varepsilon-1$ Zeichenwechsel in eben so viele Zeichenfolgen über; wie es (I. A. β.) behauptet.

Ist ε grade, so haben nothwendig $\partial^{n+\varepsilon}y$ und $\partial^n y$ über den Nullen gleiche Zeichen, eben, wie unter den Nullen. Ist daher das Zeichen von $\partial^{n-1}y$ demjenigen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ gleich, so kommt über und unter den Nullen eine Zeichenfolge hinzu; und ist das Zeichen von $\partial^{n-1}y$ demjenigen von $\partial^{n+\varepsilon}y$ entgegengesetzt, so kommt über und unter den Nullen zugleich ein Zeichenwechsel hinzu. In beiden Fällen bleibt also die Zahl der Zeichenwechsel, die in Zeichenfolgen übergehen, ε; wie es (I. B.) behauptet.

Anmerkung. Verschwinden für $x=c$ mehrere Gruppen auf einander folgender Glieder der Reihe $\partial^m y$, $\partial^{m-1}y$, $\partial^{m-2}y$, ... y, von der Art, wie diejenige $\partial^{n+\varepsilon-1}y$, $\partial^{n+\varepsilon-2}y$, ... $\partial^n y$ eine ist, jedoch unter der Bedingung, dafs sie wenigstens durch ein Glied von einander getrennt sind, so gilt von jeder einzeln, was hier ausgesagt ist, und die Zahl der in Zeichenfolgen übergehenden Zeichenwechsel ist der Summe der Zahlen der in den einzelnen Gruppen verschwindenden Zeichenwechsel gleich.

9.

Wenn von den Gröfsen y, ∂y, $\partial^x y$ .... $\partial^m y$ *nur eine allein, z. B.* $\partial^n y$, *für* $x=c$ *verschwindet, so, dafs also* $\varepsilon=1$ *ist: so gehen, in dem Falle* $n>0$, *zwei Zeichenwechsel in zwei Zeichenfolgen über, wenn* $\partial^{n+1}y$ *und* $\partial^{n-1}y$ *gleiche Zeichen haben, und kein Zeichenwechsel geht verloren, wenn* $\partial^{n+1}y$ *und* $\partial^{n-1}y$ *ungleiche Zeichen haben.* ***Ist***

$\partial^n y$ *die Gröfse* y *selbst, oder* $n=0$*: so geht immer nothwendig Ein Zeichenwechsel in Eine Zeichenfolge über.*

Dieses folgt unmittelbar aus (§. 8.), wenn man dort $\varepsilon=1$ setzt.

10.

Während x *von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *stetig wächst, kann in der Reihe der Gröfsen* $\partial^m y$, $\partial^{m-1} y$, $\partial^{m-2} y$, ... y, *die Zahl der Zeichenwechsel ihrer Werthe nur ab- und also die Zahl der Zeichenfolgen nur um eben so viel zunehmen. Nirgend kann die Zahl der Zeichenfolgen abnehmen.*

Denn, erstlich, können sich die Zeichen der Werthe der Gröfsen $\partial^m y$, $\partial^{m-1} y$, ... y nur bei dem Durchgange durch Null ändern (§. 5.). Nun giebt es aber nicht mehr Fälle für den Durchgang der Gröfsen durch Null, als in (§. 8.) aufgezählt sind, und die kleinste Zahl der Zeichenwechsel, die, beim Durchgange beliebiger Gröfsen durch Null, in eben so viele Zeichenfolgen übergehen, ist $\varepsilon-1$. Der kleinste Werth von ε aber ist 1; also ist die kleinste Zahl der Zeichenwechsel, die in Zeichenfolgen übergehen können, oder der Zunahme der Zeichenfolgen, Null: niemals negativ. Also kann die Zahl der Zeichenfolgen, so wie x stetig wächst, niemals abnehmen, sondern nur zunehmen.

11.

I. *Wenn zwischen* $x=a$ *und* $x=b$, β *reelle Wurzel der Gleichung* $y=0$ *liegen, so hat die Reihe:*

18. $(a) = \partial^m y_a$, $\partial^{m-1} y_a$, $\partial^{m-2} y_a$, ... y_a

wenigstens β *Zeichenfolgen weniger, als die Reihe*

19. $(b) = \partial^m y_b$, $\partial^{m-1} y_b$, $\partial^{m-2} y_b$, ... y_b.

Jedoch kann, wenn die Zahl der Zeichenfolgen, welche die Reihe (b) *gegen die Reihe* (a) *mehr hat,* δ *ist, auch* $\delta > \beta$ *sein.*

II. *Dagegen können zwischen* a *und* b *nicht mehr als* δ *reelle Wurzeln der Gleichung* $y=0$ *liegen; d. h. es kann nicht* $\beta > \delta$ *sein.*

Denn, (I.), geht bei jedem Durchgange von x durch eine reelle Wurzel der Gleichung $y=0$ nothwendig Ein Zeichenwechsel in Eine Zeichenfolge über (§. 9.). Und da nun die Zahl der Zeichenfolgen, während x wächst, nie wieder abnehmen kann (§. 10.), so enthält die Reihe (b) nothwendig wenigstens β Zeichenfolgen mehr, als die Reihe (a).

Lägen, (II.), mehr als δ reelle Wurzeln zwischen a und b, so müfste die Reihe (b), zufolge (I.), mehr denn δ Zeichenfolgen mehr haben, als die Reihe (a): der Voraussetzung entgegen.

12.

I. *Wenn die Reihe* (*b*) (19.) *keine Zeichenfolgen mehr hat, als die Reihe* (*a*) (18.), *also* $\delta = 0$ *ist: so kann zwischen* a *und* b *keine reelle Wurzel der Gleichung* $y = 0$ *liegen.*

II. *Wenn die Reihe* (*b*) (19.) 1, 3, 5, ... *Zeichenfolgen mehr hat, als die Reihe* (*a*) (18.), *also* δ *eine ungerade Zahl ist: so liegt zwischen* a *und* b *nothwendig wenigstens Eine reelle Wurzel der Gleichung* $y = 0$.

Denn, (I.): die Zahl β der reellen Wurzeln, die zwischen a und b liegen, kann nur der Zahl δ der Zeichenfolgen, die (*b*) mehr hat als (*a*), gleich sein, oder kleiner (§. 11. I.), nicht gröfser (§. 11. II.): also kann, wenn $\delta = 0$ ist, β ebenfalls nur $= 0$ sein.

Es kann, (II.), wenn sich unter den Gröfsen $\partial^n y$, $\partial^{n+1} y$, ... $\partial^{n+\varepsilon-1} y$, die für irgend einen reellen Werth von x, hier zwischen a und b liegend, verschwinden, diejenige $\partial^0 y$, oder y, nicht befindet, die Zahl δ der Zeichenwechsel, die in Zeichenfolgen übergehen, nur gerade sein (§. 8. I.). Ist also δ ungerade, so mufs nothwendig, für einen zwischen a und b liegenden reellen Werth von x, auch y wenigstens einmal gleich Null sein; also mufs wenigstens Eine reelle Wurzel der Gleichung $y = 0$ zwischen a und b liegen.

Anmerkung. Die Sätze (§. 11., 12.) machen den Haupttheil des Fourierschen Satzes aus.

Vermöge (§. 11. II.) enthält der Fouriersche Satz unmittelbar den Cartesischen, als besonderen Fall, in sich, und man findet den letztern daraus, in Folge dessen, was §. 1. und 2. bemerkt ist, wenn man für die beiden Grenzen a und b, erst $-\infty$ und 0, und dann 0 und $+\infty$ nimmt.

An die obigen Sätze schliefsen sich noch verschiedene Zusätze an; z. B. die folgenden.

13.

Wenn, für irgend einen reellen Werth c *von* x, *die Gröfsen* $\partial^n y$, $\partial^{n+1} y$, $\partial^{n+2} y$, ... $\partial^{n+\varepsilon-1} y$, *oder auch mehrere ähnliche Gruppen auf einander folgender Glieder der Reihe* (*x*) (8.), *alle zugleich verschwinden, und es ist* $n > 0$, *und nicht auch zugleich* $y = 0$ *für* $x = c$: *so hat die Gleichung* $y = 0$ *nothwendig wenigstens eben so viele imaginaire Wurzeln, als die Zahl der Zeichenwechsel, die, nach* (§. 8.), *beim Durchgange von* x *durch* c *nothwendig in Zeichenfolgen übergehen, Einheiten*

hat, und die, für die einzelnen Gruppen, wenn ε *ungerade,* $\varepsilon-1$ *oder* $\varepsilon+1$, *und wenn* ε *gerade,* ε, *also immer gerade ist.*

Denn es können die $\varepsilon-1$, oder $\varepsilon+1$, oder ε Zeichenwechsel, die nach der Voraussetzung für $x=c$ in eben so viele Zeichenfolgen übergehen, zufolge (§. 10.), nie wieder durch Zeichenwechsel, die aus Zeichenfolgen entständen, ersetzt werden. Also bleiben von den m Zeichenwechseln, die von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ überhaupt vorhanden sind (§. 1.), von $x=-\infty$ bis $x=c$, und von $x=c$ bis $x=+\infty$, nur $m-\varepsilon+1$, oder $m-\varepsilon$, oder $m-\varepsilon-1$ Zeichenwechsel übrig. Mehr reelle Wurzeln aber, als Zeichenwechsel in Zeichenfolgen übergehen, kann die Gleichung $y=0$ zwischen bestimmten Grenzen nicht haben (§. 11. II.). Also kann sie nur überhaupt höchstens $m-\varepsilon+1$, oder $m-\varepsilon$, oder $m-\varepsilon-1$ reelle Wurzeln haben, deren Werth von c verschieden wäre: c selbst aber ist keine reelle Wurzel von $y=0$, weil, nach der Voraussetzung, y für $y=c$ nicht verschwindet. Die Gleichung $y=0$ hat aber nothwendig, wie aufserdem bekannt, jedenfalls im Ganzen m Wurzeln. Also müssen von diesen m Wurzeln nothwendig wenigstens $\varepsilon-1$, oder $\varepsilon+1$, oder ε imaginair sein.

14.

Wenn, für irgend einen reellen Werth c *von* x, *die* ε *Gröfsen* y, ∂y, $\partial^2 y$, ... $\partial^{\varepsilon-1} y$ *alle zugleich verschwinden: so hat die Gleichung* $y=0$ *nothwendig* ε *reelle Wurzeln, jede* $=c$.

Denn es gehen in dem gegenwärtigen Falle, zufolge (§. 8. II.), für $x=c$, ε Zeichenwechsel in eben so viele Zeichenfolgen über. Es bleiben also, für den Umfang von $x=-\infty$ bis $x=c$, und von $x=c$ bis $x=+\infty$, nur noch $m-\varepsilon$ Zeichenwechsel übrig. Mehr reelle Wurzeln kann aber die Gleichung in diesem Umfange nicht haben (§. 11. II.). Also folgt zunächst, dafs auf $x=c$ selbst, wenigstens ε Wurzeln kommen. Keine dieser Wurzeln ist aber imaginair; denn sie sind alle gleich c. Und in dieser Rücksicht folgt wieder, dafs ihrer auch nicht mehr sein können, als ε, weil sonst mehr als ε Zeichenwechsel für $x=c$ in Zeichenfolgen übergehen müfsten (§. 11. I.), was nicht der Fall ist. Also hat im gegenwärtigen Falle die Gleichung $y=0$ nothwendig ε gleiche Wurzeln, jede $=c$.

15.

Wenn zwischen a *und* b *keine reelle Wurzel der Gleichung* $y=0$ *liegt, und die Reihe* (*b*) (19.) *hat* δ *Zeichenfolgen mehr, als die Reihe*

(*a*) (18.), *wo* δ, *in dem angenommenen Falle, nur eine* gerade *Zahl sein kann* (§. 8. I.): *so hat die Gleichung* $y=0$ *wenigstens* δ imaginaire *Wurzeln.*

Denn von den δ Zeichenwechseln, die, nach der Voraussetzung, von $x=a$ bis $x=b$, in eben so viele Zeichenfolgen übergegangen sind, kann keiner wieder aus einer Zeichenfolge hergestellt werden (§. 10.). Also bleiben von den m Zeichenwechseln, die $(+\infty)$ mehr hat als $(-\infty)$ (§. 1.), für die beiden Umfänge von $-\infty$ bis a und von b bis $+\infty$, zusammen nur $m-\delta$ Zeichenwechsel übrig. Deshalb kann dann die Gleichung $y=0$, in den genannten beiden Umfängen, nicht mehr als $m-\delta$ reelle Wurzeln haben (§. 11. II.). In dem allein von $-\infty$ bis $+\infty$ noch übrigen Umfange zwischen a und b hat sie aber nach der Voraussetzung keine reelle Wurzel: also kann sie überhaupt nur höchstens $m-\delta$ reelle Wurzeln haben, und hat daher nothwendig wenigstens δ imaginaire Wurzeln.

16.

Der Nutzen des Fourierschen Satzes bei der Berechnung der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung $y=0$, in Zahlen, besteht insbesondere darin, dafs der Satz die Grenzen angiebt, zwischen welchen Wurzeln liegen können, so wie diejenigen, zwischen welchen gar keine zu finden sind (§. 12. I.); desgleichen die Zahl der reellen Wurzeln, die möglicher Weise zwischen bestimmten Grenzen sich befinden können (§. 11. II.), so, dafs man mit x nicht einmal denjenigen ganzen Umfang zu durchlaufen braucht, innerhalb dessen alle Zeichenwechsel der Reihe (x) (§. 1.) in Zeichenfolgen übergehen, sondern nur diejenigen einzelnen Umfänge, innerhalb welcher Wurzeln liegen können. Zur Berechnung wird ferner der Satz auf die Weise benutzt, dafs man erst die Grenzen a und b, für welche die Zahl der Zeichenwechsel der Reihen (a) und (b) verschieden ist, so weit zu verengen sucht, dafs nur 1 oder 2 Wurzeln dazwischen fallen können, in welchem letztern Falle es darauf ankommt, zu entscheiden, ob die 2 Wurzeln reell oder imaginair sind. Wie solches, und wie die Zusammenziehung der Grenzen, und dann die weitere Berechnung der Wurzeln, mit sehr schneller Annäherung: alles auf höchst sinnreiche Weise, geschieht, lehrt die erste und zweite Abtheilung des im Eingange genannten Werkes von Fourier.

II. Der Sturmsche Satz.

Der Fouriersche Satz lehrt, wie viel reelle Wurzeln eine Gleichung $Fx=y=0$ (1.) zwischen beliebigen reellen Werthen a und b von x haben kann. Der Sturmsche Satz lehrt, wie viel reelle Wurzeln die Gleichung $Fx=y=0$ zwischen beliebigen Werthen a und b von x nothwendig haben mufs. Er ist, mit seinem Beweise, in Folgendem enthalten.

17.

Es darf immer vorausgesetzt werden, dafs eine Gleichung $Fx=0$, deren Wurzeln man sucht, keine gleichen Wurzeln habe.

Denn bekanntlich lassen sich die gleichen Wurzeln einer Gleichung absondern, und es läfst sich die Gleichung auf eine andere reduciren, die keine gleichen Wurzeln hat.

18.

Wenn man das Polynom einer gegebenen Gleichung

$$20. \qquad Fx = y = 0$$

vom mten Grade, von welcher, nach (§. 17.), *vorausgesetzt werden darf, dafs sie keine gleichen Wurzeln habe, durch die erste Abgeleitete ∂Fx von Fx, die durch*

$$21. \qquad \partial Fx = F_1 x$$

bezeichnet werden mag, dividirt, den Quotienten durch Q_1, den Rest, negativ genommen, durch F_2x bezeichnet: hierauf F_1x durch F_2x dividirt, den Quotienten durch Q_2, den Rest, negativ genommen, durch F_3x bezeichnet: ferner F_2x durch F_3x dividirt, den Quotienten durch Q_3, den Rest, negativ genommen, durch F_4x bezeichnet, und so weiter fortfährt, so, dafs

$$22. \quad \begin{cases} Fx = Q_1 F_1 x - F_2 x, \\ F_1 x = Q_2 F_2 x - F_3 x, \\ F_2 x = Q_3 F_3 x - F_4 x, \\ F_3 x = Q_4 F_4 x - F_5 x, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{m-2} x = Q_{m-1} F_{m-1} x - F_m x \end{cases}$$

ist: so gelangt man nothwendig zu einem Reste, der kein x mehr enthält, und der also mit x nicht mehr sich verändert; und wenn nicht schon $F_\mu x$ dieser Rest ist, wo $\mu < m$, so ist es jedenfalls der Rest $F_m x$.

Denn in $F_1 x$ steigt x nur bis auf die Potenz $m-1$, also auf 1 Grad niedriger, als in Fx; der erste Rest $F_2 x$ ist aber nothwendig wenigstens wieder um 1 Grad niedriger, als $F_1 x$. Daher ist $F_3 x$ wieder wenigstens um 1 Grad niedriger, als $F_2 x$; ferner $F_4 x$ wenigstens um 1 Grad niedriger, als $F_3 x$, und so weiter. Also mufs nothwendig zuletzt ein Rest $F_m x$ erscheinen, der x nicht mehr enthält.

Dieser Rest $F_m x$ kann deshalb blofs durch F_m bezeichnet werden.

19.

Keins der Gröfsen-Paare

$$23.\quad \begin{cases} Fx & \text{und} & F_1 x, \\ F_1 x & \text{und} & F_2 x, \\ F_2 x & \text{und} & F_3 x, \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ F_{m-1} x & \text{und} & F_m x \end{cases}$$

kann einen gemeinschaftlichen Factor haben, und folglich nicht für einen und denselben Werth von x verschwinden.

Denn, da vorausgesetzt wird, dafs die Gleichung $Fx = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, so haben, wie bekannt, zunächst Fx und $F_1 x = \partial Fx$ keinen gemeinschaftlichen Factor. Daraus folgt, vermöge der ersten Gleichung (22.), dafs auch $F_2 x$ mit $F_1 x$ keinen Factor gemein haben kann: denn derselbe müfste, vermöge der Gleichung, auch in Fx aufgehen, und folglich hätten Fx und $F_1 x$ einen Factor gemein; was nicht der Fall ist. Weiter folgt aus der zweiten Gleichung in (22.), dafs auch $F_2 x$ und $F_3 x$ keinen Factor gemein haben können; denn wäre es so, so müfste derselbe, der Gleichung zufolge, auch in $F_1 x$ aufgehen, und folglich würde dann $F_1 x$ und $F_2 x$ einen Factor gemein haben, was, wie sich vorhin zeigte, nicht der Fall ist. Und so weiter.

20.

Wenn in der Reihe der Gröfsen

$$24.\quad (x) = Fx,\ F_1 x,\ F_2 x,\ F_3 x,\ \ldots\ F_m,$$

die, wie vor denselben bemerkt, der Kürze wegen durch (x) bezeichnet werden mag, irgend eine: $F_n x$ (jedoch die erste Fx ausgenommen, und auch die letzte, von x unabhängige Gröfse Fm) für irgend einen reellen Werth c von x verschwindet: so haben die Werthe der beiden Gröfsen $F_{n-1} x$ und $F_{n+1} x$, zwischen welchen $F_n x$ liegt, für den nemlichen Werth c von x, nothwendig entgegengesetzte Zeichen.

Denn da vermöge (22.)

$$25. \qquad F_{n-1}x = Q_n F_n x - F_{n+1}x$$

ist, so ist für $F_n x = 0$, also, nach der Voraussetzung, für $x = c$:

$$26. \qquad F_{n-1}c = -F_{n+1}c.$$

Daraus folgt, dafs die Werthe $F_{n-1}c$ und $F_{n+1}c$ der Gröfsen $F_{n-1}x$ und $F_{n+1}x$ für $x = c$ nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben müssen, denn sonst könnte nicht $F_{n-1}c$ gleich $-F_{n+1}c$ sein.

21.

In der Reihe der Gröfsen (24.) *können nicht zwei auf einander folgende für einen und denselben reellen Werth c von x zugleich verschwinden.*

Denn wären z. B. $F_{n-1}x$ und $F_n x$ für $x = c$ zugleich Null, so wäre, vermöge der $n-1$ten Gleichung $F_{n-2}x = Q_{n-1}F_{n-1}x - F_n x$, auch $F_{n-2}x$ Null; und weil nun $F_{n-1}x$ und $F_{n-2}x$ zugleich Null wären, vermöge der vorhergehenden Gleichung, auch $F_{n-3}x$ Null, und so weiter: zuletzt auch $F_1 x$ und Fx. Also wären Fx und $F_1 x$, für einen und denselben Werth c von x, zugleich Null; folglich hätte die Gleichung $Fx = y = 0$ gleiche Wurzeln: gegen die Voraussetzung.

22.

Keine der Gröfsen der Reihe (24.) *kann identisch, oder für jeden beliebiegen Werth von x, Null sein.*

Denn wäre z. B. $F_n x$ für jeden beliebigen Werth von x Null, so müfste, vermöge der $n-3^{\text{ten}}$ Gleichung $F_{n-2}x = Q_{n-1}F_{n-1}x - F_n x$, weil sich dieselbe dann auf $F_{n-2}x = Q_{n-1}F_{n-1}x$ reduciren würde, $F_{n-1}x$ in $F_{n-2}x$ aufgehen, folglich, vermöge der vorhergehenden Gleichung $F_{n-3}x = Q_{n+2}F_{n-2}x - F_{n-1}x$, auch in $F_{n-3}x$, und vermöge der weiter vorhergehenden Gleichung $F_{n-4}x = Q_{n-3}F_{n-3} - F_{n-2}$, auch in $F_{n-4}x$, und so weiter: zuletzt also auch in $F_1 x$ und Fx. Folglich hätten dann $F_1 x$ und Fx einen gemeinschaftlichen Factor, und mithin die Gleichung $Fx = y = 0$ gleiche Wurzeln: gegen die Voraussetzung.

23.

Wenn in der Reihe der Gröfsen (24.) (*die erste und die letzte derselben ausgenommen*), *während x von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *stetig wächst, für irgend einen reellen Werth c von x, eine oder mehrere Gröfsen zugleich verschwinden: so liegt jede verschwindende Gröfse nothwendig*

zwischen zwei, für $x=c$ nicht verschwindenden Gröfsen von entgegengesetzten Zeichen.

Denn zufolge (§. 21.) können nicht zwei unmittelbar auf einander folgende Gröfsen, für einen und denselben reellen Werth c von x zugleich verschwinden. Also liegt jede verschwindende Gröfse nothwendig zwischen zwei nicht für $x=c$ verschwindenden Gröfsen, welche, zufolge (§. 20.), nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben.

24.

Wenn eine der Gröfsen (24.) (*von welchen die erste Fx einstweilen noch ausgeschlossen bleiben soll, die letzte F_m aber, weil sie kein x enthält, ausgenommen ist*), *eine oder mehrere zugleich, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wächst, für irgend einen reellen Werth c von x verschwinden: so hat, erstlich, die Reihe der Werthe der sämmtlichen Gröfsen, für kleinere Werthe von x, als c, bis zu einer um ein gewisses endliches τ_1 von c verschiedenen Grenze $c-\tau_1$, und zweitens, die Reihe der Werthe der sämmtlichen Gröfsen, für gröfsere Werthe von x als c, wiederum bis zu einer um ein gewisses endliches τ_2 von c verschiedenen Grenze $c+\tau_2$, nothwendig genau gleich viele Zeichenwechsel: die eine Reihe weder mehr noch weniger, als die andere.*

Denn es sei $F_n x$ eine von den für $x=c$ verschwindenden Gröfsen: so liegt dieselbe, nach (§. 23.), nothwendig zwischen zwei, nicht für $x=c$ verschwindenden Gröfsen mit entgegengesetzten Zeichen. Also haben $F_{n-1}x$ und $F_{n+1}x$ nothwendig entgegengesetzte Zeichen. Sie ändern aber auch ihre Zeichen nicht von $c-\tau_1$ bis $c+\tau_2$, wo τ_1 und τ_2 gewisse endliche Gröfsen sind (§. 5.). Es können also, je nachdem die mitttlere Gröfse $F_n x$ bei dem Durchgange durch Null ihr Zeichen ändert oder beibehält, (welches letztere geschehen kann, wenn etwa die Gleichung $F_n x=0$ gleiche Wurzeln hat), in Rücksicht der Zeichen folgende Fälle statt finden:

27.

	F_{n-1},	$F_n x$,	$F_{n+1}x$	
$x<c$	$\pm$	$+$	$\mp$	
$x=c$	$\pm$	0	$\mp$	**1ster und 2ter Fall.**
$x>c$	$\pm$	$+$	$\mp$	
$x<c$	$\pm$	$+$	$\mp$	
$x=c$	$\pm$	0	$\mp$	**3ter und 4ter Fall.**
$x>c$	$\pm$	$-$	$\mp$	

27.
$$\left\{\begin{array}{llll} x<c & \pm & - & \mp \\ x=c & \pm & 0 & \mp \\ x>c & \pm & - & \mp \end{array}\right\} \text{5ter und 6ter Fall.}$$
$$\left\{\begin{array}{llll} x<c & \pm & - & \mp \\ x=c & \pm & 0 & \mp \\ x>c & \pm & + & \mp \end{array}\right\} \text{7ter und 8ter Fall.}$$

In allen diesen Fällen (und mehrere sind nicht möglich), findet, wie man sieht, zwischen den drei Gröfsen $F_{n-1}x$, F_nx und $F_{n+1}x$, eben sowohl für $x<c$, als für $x>c$, immer Ein Zeichenwechsel Statt. Also haben die Gröfsen, vor und nach dem Durchgange von F_nx durch 0, genau gleich viele Zeichenwechsel. Was aber von den genannten drei Gröfsen gilt, gilt von jeden andern drei, deren beiden äufseren nothwendig immer für $x=c$ entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wenn die mittlere für $x=c$ soll Null sein können (§. 20.). Es folgt also, dafs sich die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der sämmtlichen Gröfsen (24.), bei dem Verschwinden einer oder mehrerer von denjenigen: F_1x, F_2x, F_3x, ... $F_{m-1}x$, für $x=c$ niemals ändert.

25

Wenn die erste Gröfse Fx, in der Reihe (24.), *für keinen reellen Werth von x, von $x=a$ bis $x=b$, Null ist: also die Gleichung $Fx=0$ zwischen $x=a$ und $x=b$ keine reellen Wurzeln hat: so haben die beiden Gröfsen-Reihen*

28. $(a) = Fa,\ F_1a,\ F_2a,\ F_3a,\ \ldots.\ F_m,$

29. $(b) = Fb,\ F_1b,\ F_2b,\ F_3b,\ \ldots.\ F_m$

nothwendig gleich viele Zeichenwechsel: es mag von den Gröfsen F_1x, F_2x, F_3x, ... $F_{m-1}x$, während x von a bis b stetig wächst, keine durch Null gehen, oder es mögen, für reelle Werthe von x zwischen a und b, eine oder mehrere von ihnen, nach einander, oder zugleich, verschwinden.

Denn, wenn, erstlich, keine der Gröfsen F_1x, F_2x, F_3x, ... $F_{m-1}x$, von $x=a$ bis $x=b$, durch Null geht, folglich ihr Zeichen nicht ändert (indem auch keine der Gröfsen ∞ grofs sein kann): so behalten offenbar alle Gröfsen der Reihe (24.) ihr Zeichen unverändert bei, indem auch die erste, Fx, der Voraussetzung nach, nicht durch Null gehen und also ebenfalls ihr Zeichen nicht ändern soll, die letzte F_m aber, als constante, von x unabhängige Gröfse, niemals das Zeichen wechseln

kann. Folglich haben, in diesem Falle, die beiden Reihen (28.) und (29.) nothwendig gleich viele Zeichenwechsel. Aber auch wenn, zweitens, für irgend einen Werth c von x, von den Gröfsen F_1x, F_2x, F_3x, ... $F_{m-1}x$ eine, oder mehrere zugleich durch Null gehen, ändert sich, zufolge (§. 24.), die Zahl der Zeichenwechsel der sämmtlichen Gröfsen (24.) nicht; also auch nicht, wenn eine, oder mehrere der genannten Gröfsen zugleich, etwa für mehrere zwischen a und b liegende reelle Werthe von x, durch Null gehen. Also ändert sich die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe (24.), von $x=a$ bis $x=b$, unter der Bedingung, dafs die erste Gröfse Fx innerhalb dieser Grenzen nicht durch Null geht, niemals.

26.

Wenn, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wächst, in der Reihe (24.), *die erste Gröfse Fx für irgend einen reellen Werth c von x verschwindet, also c eine reelle Wurzel der Gleichung $Fx=0$ ist: so hat die Reihe der Gröfsen*

30. $(c+\varkappa) = F(c+\varkappa),\ F_1(c+\varkappa),\ F_2(c+\varkappa),\ \ldots.\ F_m,$

für jeden beliebigen positiven Werth von $\varkappa$, der zwischen Null und einer gewissen endlichen Gröfse τ_2 liegt, nothwendig Einen Zeichenwechsel weniger, als die Reihe

31. $(c-\varkappa) = F(c-\varkappa),\ F_1(c-\varkappa),\ F_2(c-\varkappa),\ \ldots.\ F_m,$

für jeden beliebigen Werth von $\varkappa$, zwischen Null und einer gewissen endlichen Gröfse τ_1; und zwar immer: es mögen, aufser Fx, noch andere Gröfsen der Reihe, mit welchen es geschehen kann, für $x=c$ verschwinden, oder nicht.

Denn, zuerst ist zu bemerken, dafs die zweite Gröfse der Reihe (24.) F_1x, die nichts anders ist, als ∂Fx (21.), für $x=c$ nicht mit Fx zugleich verschwinden kann, weil sonst die Gleichung $Fx=0$ gleiche Wurzeln haben würde, gegen die Voraussetzung. In dem gegenwärtigen Falle ist also, für den Satz (§. 6.): $n=0$ und $\varepsilon=1$, also ε ungerade; nemlich es ist hier die für $x=c$ verschwindende Gröfse $\partial^0 y=y$, und folglich ist, für das dortige $fx=\partial^n y$, hier $n=0$; und da nnr eine Gröfse Fx verschwindet, so ist $\varepsilon=1$. Es haben also, vermöge des Satzes (§. 6.), $F(c-\varkappa)$ und $F_1(c-\varkappa)$ nothwendig entgegengesetzte, dagegen $F(c+\varkappa)$ und $F_1(c+\varkappa)$ gleiche Zeichen. Also haben die beiden ersten Glieder der Reihe (30.) nothwendig einen Zeichenwechsel weniger, als die beiden ersten Glieder der Reihe (31.). Nun hat aber, nach (§. 25.),

der übrige Theil der Reihe (30.), vom 2ten Gliede bis zu Ende, in allen Fällen eben so viele Zeichenwechsel, als der gleiche übrige Theil der Reihe (31.): es mögen für $x = c$ noch Glieder der Reihe (24.), aufser dem ersten, verschwinden, oder nicht. Also hat, in allen Fällen, die Reihe (30.) nothwendig einen Zeichenwechsel weniger, als die Reihe (31.).

27.

Die Gleichung $Fx = y = 0$ *hat zwischen* $x = a$ *und* $x = b$ *nothwendig eben so viele reelle Wurzeln, als die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe* (*b*) *gegen diejenige der Zeichenwechsel der Reihe* (*a*) *Einheiten weniger hat.*

Denn für jede reelle Wurzel verliert die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe (*a*), zufolge (§. 26.), nothwendig eine Einheit. Es ist folglich der Unterschied der Zahlen der Zeichenwechsel der Reihen (*a*) und (*b*) der Zahl der reellen Wurzeln zwischen *a* und *b* nothwendig gleich.

Dieser Satz ist der Sturmsche. Es schliefsen sich daran wiederum Zusätze und Bemerkungen; zum Beispiele die folgenden.

28.

Wenn, für $x = a$ *und für* $x = b$ *selbst, eine oder mehrere Gröfsen der Reihe* (*x*) (24.) *Null sind: so ist die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung* $Fx = y = 0$ *der Zahl der Zeichenwechsel, welche die übrig bleibenden, nicht verschwindenden Glieder der Reihe* (*b*) *gegen diejenigen der Reihe* (*a*) *weniger haben, gleich.*

Denn, wenn erstlich Glieder der Reihe (*x*) (24.), die auf das erste folgen, z. B. für $x = a$ verschwinden: so haben die Werthe der Glieder, zwischen welchen jedes einzelne verschwindende Glied liegt, nach (§. 20.), für den nemlichen Werth *a* von *x*, nothwendig entgegengesetzte Zeichen. Gesetzt also, es sei $F_n x$ eines der für $x = a$ verschwindenden Glieder, also $F_n a = 0$, so bleibt zwischen den drei Gliedern $F_{n-1} a$, $F_n a = 0$ und $F_{n+1} a$ Ein Zeichenwechsel übrig. Aber Ein Zeichenwechsel würde auch immer nur vorhanden sein, wenn auch $F_n a$ nicht verschwände: gleich viel, ob es positiv oder negativ wäre. Eben so würde es sich mit jedem andern für $x = a$ verschwindenden Gliede verhalten. Also ist die Zahl der Zeichenwechsel zwischen den übrig bleibenden, nicht für $x = a$ verschwindenden Gliedern der Reihe (*a*) genau eben so grofs, als sie es sein würde, wenn kein Glied für $x = a$ verschwände.

Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Reihe (b). Also ist die Zahl der reellen Wurzeln zwischen a und b, nach dem allgemeinen Satze (§. 27.), so grofs, als der Unterschied der Zahlen der Zeichenwechsel der in den Reihen (a) und (b) nicht verschwundenen Glieder, und zwar, in so fern sich, nach der Voraussetzung, das erste Glied Fa der Reihe (a) oder das erste Glied Fb der Reihe (b) nicht unter der verschwindenden befindet.

Ist, zweitens, für $x = a$ auch noch das erste Glied Fa der Reihe (a), und vielleicht auch, für $x = b$, das erste Glied Fb der Reihe (b) gleich Null: so ist, eben dadurch, dafs x von irgend einem nächst kleinern Werthe als a oder b, von welchem an Fx bis zu Fa oder Fb das Zeichen nicht ändert, in a oder b selbst übergeht, Ein Zeichenwechsel verschwunden. Also liegen, nach dem allgemeinen Satze (§. 27.), auch in diesem Falle, zwischen a und b (nunmehr a und b selbst nicht mit gezählt) noch eben so viele reelle Wurzeln, als die übrig gebliebenen, nicht verschwundenen Glieder der Reihe (a) Zeichenwechsel weniger haben, als die übrig gebliebenen Glieder der Reihe (b).

29.

Wenn man die Reihe derjenigen Glieder allein, die in den Gröfsen Fx, F_1x, F_2x, ... F_mx *die höchste Potenz von* x *enthalten, durch* $[x]$ *bezeichnet: so ist die Zahl der reellen Wurzeln, welche eine gegebene Gleichung* $Fx = y = 0$ *überhaupt nothwendig hat, gleich dem Unterschiede der Zahlen der Zeichenwechsel in den beiden Reihen* $[-\infty]$ *und* $[+\infty]$. *Die Zahl der negativen Wurzeln der Gleichung ist gleich dem Unterschiede der Zahlen der Zeichenwechsel in den Reihen* $[-\infty]$ *und* $[0]$, *und die Zahl der positiven Wurzeln gleich dem Unterschiede der Zahlen der Zeichenwechsel in den Reihen* $[0]$ *und* $[+\infty]$.

Dieses folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze (§. 27.); denn zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen sämmtliche reelle Wurzeln, zwischen $-\infty$ und 0 alle negativen, und zwischen 0 und $+\infty$ alle positiven Wurzeln der Gleichung. Auf die durch $[x]$ bezeichnete Reihe aber reducirt sich die Reihe (x) für $x = \pm\infty$, weil für unendlich grofse x die übrigen Glieder der Reihe gegen das erste verschwinden.

30.

Wenn bei den Divisionen, durch welche die Gröfsen F_2x, F_3x, ... F_m berechnet werden, (§. 18.), Brüche vorkommen, die die weitere Rechnung erschweren würden: so darf man, um dieselben zu vermeiden,

jedesmal, ehe man dividirt, den Dividend mit irgend einer positiven, von x unabhängigen Zahl, oder Gröfse, die die Brüche aufhebt, multipliciren. Denn: gesetzt die Gröfsen $F_{n+1}x$ und F_nx enthielten Brüche, die durch die Multiplication mit der positiven Gröfse M weggeschafft würden, so ist, einmal, ohne den Zutritt von M:

$$32. \qquad F_{n-1}x = Q_nF_nx - F_{n+1}x,$$

und mit den Multiplicator M:

$$33. \qquad M.F_{n-1}x = M.Q_nF_nx - M.F_{n+1}x.$$

Alle drei Glieder der Gleichung (33.) verschwinden aber einzeln für die nemlichen Werthe von x, und haben gegen einander, für jeden beliebigen Werth von x, eben die Zeichen, wie die drei Glieder der Gleichung (32.); worauf es allein ankommt.

Eben so darf man, wenn alle Glieder des Divisiors einen von x unabhängigen, gemeinschaftlichen, positiven Factor haben, denselben weglassen. Denn, wenn man, vor der Division, den Divisor mit M theilt, ist es eben so viel, als wenn man den Dividend mit M multiplicirt, welches, wie sich vorher zeigte, geschehen darf.

Der Multiplicator oder Divisor M mufs aber nothwendig *positiv* sein, weil es sonst geschehen könnte, dafs die Zeichen der drei Glieder der Gleichung (33.) nicht die nemlichen wären, wie die der drei Glieder der Gleichung (32.). In dem Falle also, wenn die Coëfficienten der gegebenen Gleichung nicht in Zahlen, sondern in Buchstaben ausgedrückt sind, so, dafs ihre Zeichen, und die aller davon abhängenden Gröfsen, unbestimmt bleiben: so mufs man zu dem Multiplicator M das Quadrat derjenigen Gröfse nehmen, die die Brüche aufheben würde: der Sicherheit wegen, dafs der Multiplicator positiv sei; und wenn ein Factor aus dem Divisor soll weggelassen werden dürfen, mufs er nothwendig ein Quadrat sein.

31.

Für den zweiten, dritten und vierten Grad sind die Gröfsen Fx, F_1x, F_2x, ..., mit, allgemein, durch Buchstaben ausgedrückten Coëfficienten, und die Sätze, die sich daraus ergeben, folgende: wenn man nemlich, was immer geschehen darf, um die Rechnung und die Ausdrücke abzukürzen, annimmt, dafs die Gleichungen vom 3ten und 4ten Grade kein zweites Glied haben.

I. Gleichungen vom *zweiten* Grade.

$$34.\quad \begin{cases} Fx = x^2+\alpha x+\beta = 0, \\ F_1x = 2x+\alpha, \\ F_2x = \alpha^2-4\beta. \end{cases}$$

Es ist also

$$35.\quad \begin{array}{c|cccc} & Fx, & F_1x, & F_2x, \\ [-\infty] & + & - & \alpha^2-4\beta, \\ (0) & \beta & \alpha & \alpha^2-4\beta, \\ [+\infty] & + & + & \alpha^2-4\beta, \end{array}$$

Die Reihe $[-\infty]$ hat zwei und die Reihe $[+\infty]$ keine Zeichenwechsel, wenn $\alpha^2-4\beta>0$ ist; also hat die erste Reihe 2 Zeichenwechsel mehr, als die zweite. Dagegen haben beide Reihen Einen, und folglich gleich viele Zeichenwechsel, wenn $\alpha^2-4\beta<0$ ist. Also hat die Gleichung $Fx = 0$ im ersten Falle 2 reelle, im andern Falle 2 imaginaire Wurzeln, wie bekannt ist. Hat die Gleichung reelle Wurzeln, so, dafs also $\alpha^2-4\beta$ positiv ist, und es ist α positiv, so hat die Reihe (0) keinen, und folglich 2 Zeichenwechsel weniger, als $[-\infty]$; folglich sind in diesem Falle die beiden reellen Wurzeln negativ. Ist α negativ, so folgt, auf ähnliche Weise, dafs die beiden Wurzeln positiv sind.

II. Gleichungen vom *dritten* Grade.

$$36.\quad \begin{cases} Fx = x^3+\alpha x+\beta = 0, \\ F_1x = 3x^2+\alpha, \\ F_2x = -(2\alpha x+3\beta), \\ F_3x = -(4\alpha^3+27\beta^2). \end{cases}$$

Es ist also

$$37.\quad \begin{array}{c|cccc} & Fx, & F_1x, & F_2x, & F_3x, \\ [-\infty] & - & + & +\alpha & -(4\alpha^3+27\beta^2), \\ (0) & +\beta & +\alpha & -\beta & -(4\alpha^3+27\beta^2), \\ [+\infty] & + & + & -\alpha & -(4\alpha^3+27\beta^2). \end{array}$$

Ist nun α positiv, so ist auch $4\alpha^3+27\beta^2$ positiv, weil β^2 immer positiv ist. Also hat in diesem Falle $[-\infty]$ 2 Zeichenwechsel, $[+\infty]$ dagegen nur Einen. Also hat die Gleichung dann immer 1 reelle Wurzel, und zwar ist diese Wurzel immer negativ, es sei β positiv oder negativ; denn in beiden Fällen hat (0) nur Einen, also 1 Zeichenwechsel weniger, als $[-\infty]$.

Ist α negativ und $27\beta^2 > 4\alpha^3$, also $4\alpha^3 + 27\beta^2$ positiv, so sind die Zeichen der Reihen (37.) folgende:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Fx, & F_1x, & F_2x, & F_3x, \end{array} \\ 38. & \left\{\begin{array}{cccccc} [-\infty] & = & - & + & - & - \\ (0) & = & + & - & - & - \\ [+\infty] & = & + & + & + & - \end{array}\right\} \text{wenn } \beta \text{ positiv ist,} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cc} & \\ 39. & \left\{\begin{array}{cccccc} [-\infty] & = & - & + & - & - \\ (0) & = & - & - & + & - \\ [+\infty] & = & + & + & + & - \end{array}\right\} \text{wenn } \beta \text{ negativ ist.} \end{array}$$

Also hat die Gleichung nunmehr 1 reelle negative Wurzel, wenn β positiv, und 1 reelle positive Wurzel, wenn β negativ ist.

Ist α negativ und $27\beta^2 < 4\alpha^3$, also $4\alpha^3 + 27\beta^2$ negativ: so sind die Zeichen der Reihen (37.) folgende:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Fx, & F_1x, & F_2x, & F_3x, \end{array} \\ 40. & \left\{\begin{array}{cccccc} [-\infty] & = & - & + & - & + \\ (0) & = & + & - & - & + \\ [+\infty] & = & + & + & + & + \end{array}\right\} \text{wenn } \beta \text{ positiv ist,} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cc} & \\ 41. & \left\{\begin{array}{cccccc} [-\infty] & = & - & + & - & + \\ (0) & = & - & - & + & + \\ [+\infty] & = & + & + & + & + \end{array}\right\} \text{wenn } \beta \text{ negativ ist.} \end{array}$$

Also hat die Gleichung 1 negative und 2 positive reelle Wurzeln, wenn β positiv, und 2 negative und 1 positive reelle Wurzel, wenn β negativ ist.

Gleichungen vom *vierten* Grade.

$$42. \quad \begin{cases} Fx = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \\ F_1x = 4x^3 + 2\alpha x + \beta, \\ F_2x = -(2\alpha x^2 + 3\beta x + 4\gamma), \\ F_3x = -[9\beta^2 + 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)]x - \beta(\alpha + 12\gamma) = P, \\ F_4x = 16\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2 - \beta^2[27\beta^2 + 4\alpha(\alpha^2 - 36\gamma)] = Q. \end{cases}$$

Es ist also

$$43. \quad \begin{array}{cccccccc} & Fx, & & F_1x, & & F_2x, & F_3x, & F_4x, \\ [-\infty] & = & + & - & & -\alpha & +P & +Q, \\ (0) & = & +\gamma & +\beta & & -\gamma & -\beta(\alpha + 12\gamma) & +Q, \\ [+\infty] & = & + & + & & -\alpha & -P & +Q. \end{array}$$

Man kann hieraus für den vierten Grad wieder Folgerungen ziehen, die die Zahl der vorhandenen positiven und negativen Wurzeln aus den Zeichen und der relativen Gröfse der Coëfficienten der Gleichung ergeben. Ihre Aufzählung mag, um den Raum zu sparen, wegbleiben.

32.

So läfst sich die Untersuchung der Zahl der reellen Wurzeln von Gleichungen, deren Coëfficienten nicht in Zahlen, sondern, ohne Bestimmung ihres Zeichens und ihrer Gröfse, allgemein, in Buchstaben ausgedrückt sind, wie man sieht, beliebig auf höhere Grade fortsetzen. Nur werden die Resultate immer verwickelter und, wegen der grofsen Verschiedenheit der Fälle, schnell zahlreicher. In geringerem Maafse nimmt zwar die Mühe und Schwierigkeit der Rechnung mit dem Grade der Gleichung zu, wenn die Coëfficienten in Zahlen ausgedrückt sind; indessen werden dann wieder die Coëfficienten der Resultate, durch die zur Vermeidung der Brüche nothwendigen Multiplicatoren, bald sehr grofs.

7.

Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.

(Von Herrn *C. A. Bretschneider*, Auditor beim Justiz-Collegio zu Gotha.)

(Schlufs des Aufsatzes No. 4. im vorigen Hefte.)

§. 6.

Da die Gaufsischen Gleichungen eine höchst einfache und elegante Beziehung zwischen den sechs Bestimmungsstücken des sphärischen Dreiecks darstellen, so will ich sie als ein neues System von Grundformeln betrachten, und das auf die Ausdrücke (1.) angewendete Verfahren auch auf sie auwenden, um dadurch zu neuen Relationen zu gelangen. Wird zu diesen Gleichungen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ± 1 hinzugefügt, so ergeben sich folgende, wie es scheint, noch unbekannte Ausdrücke:

14.
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}a},\\
\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}a},\\
\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a},\\
\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a},\\
\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}a},\\
\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}a},\\
\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}a},\\
\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}.
\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen stellen gewissermafsen die Gaufsischen in weiterer Ausdehnung dar, und lassen sich, eben so wie diese, durch Einführung des Modulus in Productenformeln umsetzen; z. B.

15.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180^0)\cos\frac{1}{2}A\\
\qquad = m.\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c),\\
\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180^0)\cos\frac{1}{2}A\\
\qquad = m.\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c),
\end{array}\right.$$

u. s. w. Von den zahlreichen, aus der Division der Gleichungen (14.) entstehenden, Ausdrücken mögen zur Ersparung des Raumes nur folgende hier Platz finden:

$$16.\begin{cases}\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c),\\ \operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b-c),\\ \operatorname{tang}\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B-C+180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(-a+b+c),\\ \operatorname{tang}\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(A+B-C+180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(a+b-c).\end{cases}$$

Sie entsprechen den einfachern Ausdrücken $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)\operatorname{cot}\frac{1}{2}(B-C)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{cot}\frac{1}{2}(b-c)$ u. s. w., und ihre geeignete Verbindung giebt:

$$17.\begin{cases}\dfrac{\operatorname{cot}\frac{1}{4}(A+B+C-180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)}\\ =\dfrac{\operatorname{cot}\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c)},\\ \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)}\\ =\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c)},\end{cases}$$

§. 7.

Die merkwürdigsten und elegantesten Formeln aber der gesammten sphärischen Trigonometrie erhält man aus der Multiplication der Gleichungen (14.) und sie mögen daher hier um desto eher einen Platz finden, je weniger sie bis jetzt bekannt zu sein scheinen. Sie sind folgende:

$$18.\begin{cases}\sin^2\frac{1}{4}(A+B+C-180°)=\dfrac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\\ \sin^2\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)=\dfrac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},\\ \cos^2\frac{1}{4}(A+B+C-180°)=\dfrac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\\ \cos^2\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)=\dfrac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},\\ \operatorname{tang}^2\frac{1}{4}(A+B+C-180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c),\\ \operatorname{tang}^2\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{cot}\frac{1}{4}(a+b-c);\end{cases}$$

$$19.\begin{cases}\sin^2\frac{1}{4}(a+b+c)=\\ \dfrac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C-180°)}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C},\\ \sin^2\frac{1}{4}(-a+b+c)=\\ \dfrac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},\end{cases}$$

$$19.\quad \begin{cases} \cos^2\frac{1}{4}(a+b+c) = \\ \dfrac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \\ \cos^2\frac{1}{4}(-a+b+c) = \\ \dfrac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}, \\ \tang^2\frac{1}{4}(a+b+c) = \\ \tang\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\tang\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\tang\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\tang\frac{1}{4}(A+B-C+180°), \\ \tang^2\frac{1}{4}(-a+b+c) = \\ \tang\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\tang\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\cot\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cot\frac{1}{4}(A+B-C+180°). \end{cases}$$

Für den Modulus endlich finden sich folgende nicht weniger merkwürdige Werthe:

$$20.\quad \begin{cases} m = \dfrac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)} \\ = \dfrac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos(a+b-c)} \\ = \dfrac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\sin\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)} \\ = \dfrac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180°)\cos\frac{1}{4}(-A+B+C+180°)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+180°)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180°)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}. \end{cases}$$

§. 8.

Werden je zwei der Gaufsischen Gleichungen zusammen multiplicirt, so ergeben sich, nach einigen Reductionen, die Formeln:

$$21.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(B+C)}{\sin A} = \dfrac{\cos c+\cos b}{1+\cos a}, & \dfrac{\sin(b+c)}{\sin a} = \dfrac{\cos C+\cos B}{1-\cos A}, \\ \dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{\cos c-\cos b}{1-\cos a}, & \dfrac{\sin(b-c)}{\sin a} = \dfrac{\cos C-\cos B}{1+\cos A}, \end{cases}$$

oder, mit Zuziehung von (4.),

$$22.\quad \begin{cases} m = \dfrac{\sin(B+C)}{\cos c+\cos b}\cot\frac{1}{2}a = \dfrac{\cos C+\cos B}{\sin(b+c)}\cot\frac{1}{2}A \\ = \dfrac{\sin(B+C)}{\cos b-\cos c}\tang\frac{1}{2}a = \dfrac{\cos C-\cos B}{\sin(b+c)}\tang\frac{1}{2}A, \end{cases}$$

Die Gleichungen (21.), welche die Functionen der ganzen Winkel und Seiten enthalten, sind in ihrer Art nicht weniger einfach und elegant, als die Gaufsischen. Werden sie daher als ein drittes System von Grundformeln betrachtet, und auf ähnliche Weise, wie die beiden ersten Systeme, behandelt, so findet sich, wenn man ± 1 zu ihnen hinzufügt und aus (8.) die nöthigen Substitutionen macht:

$$23.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = \dfrac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)]}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \\ \sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = \dfrac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)]}}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \\ \cos\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \\ -\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = \dfrac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = \dfrac{m\sin a\sin b\sin c}{1+\cos a+\cos b+\cos c}; \\ -\operatorname{tang}\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = \dfrac{m\sin a\sin b\sin c}{1+\cos a-\cos b-\cos c}, \end{cases}$$

$$24.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}(a+b+c) = \\ \dfrac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)]}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \\ \sin\frac{1}{2}(-a+b+c) = \\ \dfrac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)]}}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}, \\ \cos\frac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \qquad \cos\frac{1}{2}(-a+b+c) = \dfrac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{M\sin A\sin B\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C-1}, \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(-a+b+c) = \dfrac{M\sin A\sin B\sin C}{-\cos A+\cos B+\cos C+1}, \end{cases}$$

wobei der Kürze halber $M = \frac{1}{m}$ gesetzt worden ist. Die unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Ausdrücke können mit Hülfe der Gleichung (5.) beliebig verwandelt werden. Für den Modulus findet man die Werthe:

$$25.\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{-4\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{(1+\cos a+\cos b+\cos c)(1+\cos a-\cos b-\cos c)} \\ = \dfrac{4\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\cos\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{(1-\cos a+\cos b-\cos c)(1-\cos a-\cos b+\cos c)} \\ = \dfrac{(\cos A+\cos B+\cos C-1)(-\cos A+\cos B+\cos C+1)}{4\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)} \\ = \dfrac{(\cos A-\cos B+\cos C+1)(\cos A+\cos B-\cos C+1)}{4\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{cases}$$

§. 9.

Mit Hülfe dieser Entwicklungen läfst sich eine grofse Zahl neuer Formeln angeben, welche alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks auf die verschiedenste Weise combinirt enthalten. Mangel an Raum verbietet die Anführung vieler; daher mögen hier nur einige der merkwürdigeren Platz finden, deren Ableitung sich leicht übersehen läfst. Aus (23.) und (24.) folgt:

$$\begin{cases} \cos A+\cos B+\cos C-1 = \dfrac{4\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b\sin c}, \\ -\cos A+\cos B+\cos C+1 = \dfrac{4\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b\sin c}, \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} \cos a+\cos b+\cos c+1 = \\ \dfrac{4\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{\sin A\sin B\sin C}, \\ \cos a-\cos b-\cos c+1 = \\ \dfrac{-4\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{\sin A\sin B\sin C}; \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} \sin(+A+B+C-180^\circ) = m.\dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}, \\ -\sin(-A+B+C+180^\circ) = m.\dfrac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{\cot\frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}c}, \\ \sin(a+b+c) = \dfrac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{m\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}A\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}C}, \\ \sin(-a+b+c) = \dfrac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{m\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C}; \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} m^2 = \dfrac{(\cos A+\cos B+\cos C-1)(-\cos A+\cos B+\cos C+1)(\cos A-\cos B+\cos C+1)(\cos A+\cos B-\cos C+1)}{\sin(a+b+c)\sin(-a+b+c)\sin(a-b+c)\sin(a+b-c)} \\ = \dfrac{-\sin(A+B+C-180^\circ)\sin(-A+B+C+180^\circ)\sin(A-B+C+180^\circ)\sin(A+B-C+180^\circ)}{(1+\cos a+\cos b+\cos c)(1+\cos a-\cos b-\cos c)(1-\cos a+\cos b-\cos c)(1-\cos a-\cos b+\cos c)}; \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} \dfrac{\cos A+B+\cos C-1}{\cos a+\cos b+\cos c+1} = m\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\cot\frac{1}{2}(a+b+c), \\ \dfrac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{\cos a-\cos b-\cos c+1} = -m\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\cot\frac{1}{2}(-a+b+c), \\ \dfrac{4m}{\sin A\sin B\sin C} = \cot\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cot\frac{1}{2}(a-b+c)+\cot\frac{1}{2}(a+b-c)-\cot\frac{1}{2}(a+b+c), \\ \dfrac{4}{m\sin a\sin b\sin c} = \cot\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)-\cot\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) \\ \qquad -\cot\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)-\cot\frac{1}{2}A+B-C+180^\circ), \\ \dfrac{1+\cos A\cos B+\cos A\cos C+\cos B\cos C}{M\sin A\sin B\sin C} = \cot a+\cot b+\cot c-\cot\frac{1}{2}(a+b+c), \\ \dfrac{1+\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c}{m\sin a\sin b\sin c} = \cot\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)-\cot A-\cot B-\cot C, \\ \dfrac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}A\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}B+\mathrm{tang}\frac{1}{2}A\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}C+\mathrm{tang}\frac{1}{2}B\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}C-1}{2} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} \\ = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \dfrac{2}{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}c+\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c-1}. \end{cases}$$

Endlich wird noch für m gefunden:

$$30.\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{1-\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)\cos\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{1-\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}, \\ m = \dfrac{\cot\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)-\cot\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)-\cot\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)-\cot\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)}{-\cot\frac{1}{2}(a+b+c)+\cot\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cot\frac{1}{2}(a-b+c)+\cot\frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{cases}$$

§. 10.

Aufser den bisher gefundenen Gleichungen, welche sämmtlich aus (1.) abgeleitet waren, können noch andere angegeben werden, welche durch passende Verwandlungen der Grundformel (*a.*) entstehen, aber den bisher gefundenen an Geschmeidigkeit und Eleganz weit nachstehen. Multiplicirt man die mittelst des Polardreiecks aus (*a.*) abgeleitete Formel $\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$ mit $\cos a$, und substituirt dann linker Hand statt $\cos a$ seinen Werth aus (*a.*), so erhält man den bekannten Cagnolischen Ausdruck:

$$31.\quad \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a.$$

Hieraus und durch Division der Gleichungen (1.) findet man noch:

$$32.\quad m^2 = \frac{1+\cos A \cos B \cos C}{1-\cos a \cos b \cos c} = \frac{1+\cos A \cot b \cot c}{1-\cos a \cot B \cot C}.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke, oder auch, wenn man in den beiden letzten Formeln in (7.) $\cos b = \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B$ setzt, erhält man ferner die Gleichungen

$$33.\quad \begin{cases} \cos B \cos c = \cot a \sin c - \cot A \sin B, \\ \cos C \cos b = \cot a \sin b - \cot A \sin C, \end{cases}$$

welche sich auch in folgende Form bringen lassen:

$$34.\quad \begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A, \\ \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c = \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich eine ganze Reihe Ausdrücke ableiten, welche eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel durch die beiden andern Seiten und ihre entgegenstehenden Winkel geben. Das Verfahren hierbei ist leicht zu übersehen, daher nur die Resultate hier Platz finden mögen.

35.
$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\cos B \sin C \cos b + \sin B \cos C \cos c}{1 - m^2 \sin^2 b \sin^2 c} & \sin a = \dfrac{\sin b \cos c \cos C + \cos b \sin c \cos B}{1 - m^2 \sin^2 b \sin^2 c} \\ = \dfrac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B \cos C \cos c - \cos B \sin C \cos b} & = \dfrac{\sin(b+c)\sin(b-c)}{\sin b \cos c \cos C - \cos b \sin c \cos B} \\ = \dfrac{\cos 2C - \cos 2B}{2(\sin B \cos C \cos c - \cos B \sin C \cos b)}, & = \dfrac{\cos 2c - \cos 2b}{2(\sin b \cos c \cos C - \cos b \sin c \cos B)}, \\ \cos A = \dfrac{-\cos B \cos C + \cos b \cos c \sin B \sin C}{1 - m^2 \sin^2 b \sin^2 c} & \cos a = \dfrac{\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos B \cos C}{1 - m^2 \sin^2 b \sin^2 c} \\ = \dfrac{\cos b \sin 2C - \cos c \sin 2B}{2(\sin B \cos C \cos c - \cos B \sin C \cos b)} & = \dfrac{\cos C \sin 2b - \cos B \sin 2c}{2(\sin b \cos c \cos C - \cos b \sin c \cos B)} \\ = \dfrac{\cos C \operatorname{tang} c - \cos B \operatorname{tang} b}{\cos C \operatorname{tang} b - \cos B \operatorname{tang} c}, & = \dfrac{\cos b \operatorname{tang} B - \cos c \operatorname{tang} C}{\cos c \operatorname{tang} B - \cos b \operatorname{tang} C}; \end{cases}$$

36.
$$\begin{cases} \operatorname{tang} A = \dfrac{\operatorname{tang} B \cos c + \operatorname{tang} C \cos b}{\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \cos b \cos c - 1} & \operatorname{tang} a = \dfrac{\operatorname{tang} b \cos C + \operatorname{tang} c \cos B}{1 - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos B \cos C} \\ = \dfrac{\cos 2C - \cos 2B}{\cos b \sin 2C - \cos c \sin 2B}, & = \dfrac{\cos 2c - \cos 2b}{\cos C \sin 2b - \cos B \sin 2c}. \end{cases}$$

Um zu Ausdrücken für $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}a$ zu gelangen, nehme man zwei Hülfswinkel Q und q, so, dafs

37.
$$\begin{cases} \cos Q = -\cos\frac{1}{2}A \cos B + \sin\frac{1}{2}A \sin B \cos c = \cos\frac{1}{2}A \cos C - \sin\frac{1}{2}A \sin C \cos b \\ \cos q = +\cos\frac{1}{2}a \cos b + \sin\frac{1}{2}a \sin b \cos C = \cos\frac{1}{2}a \cos c + \sin\frac{1}{2}a \sin c \cos B \end{cases}$$

ist. Nennt man dann das sphärische Perpendikel, aus A auf a, p: so ist $\sin p = m \sin b \sin c$, $\cos^2 p = 1 - m^2 \sin^2 b \sin^2 c$, und man findet nun leicht folgende Formeln:

38.
$$\begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \dfrac{\cos C + \cos B}{2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 Q)}} = \dfrac{m \sin(b-c)}{2\cos Q} = \dfrac{\sin B \cos c - \sin C \cos b}{2\cos Q}, \\ \sin\frac{1}{2}a = \dfrac{\cos c - \cos b}{2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 q)}} = \dfrac{\sin(B+C)}{2m\cos q} = \dfrac{\sin b \cos C + \sin c \cos B}{2\cos q}, \\ \cos\frac{1}{2}A = \dfrac{\cos C - \cos B}{2\cos Q} = \dfrac{m \sin(b+c)}{2\sqrt{(\cos^2 q - \cos^2 Q)}} = \dfrac{\sin B \cos c + \sin C \cos b}{2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 Q)}}, \\ \cos\frac{1}{2}a = \dfrac{\cos c + \cos b}{2\cos q} = \dfrac{M \sin(B-C)}{2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 q)}} = \dfrac{\sin b \cos C - \sin c \cos B}{2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 q)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \dfrac{\cos C + \cos B}{\sin B \cos c + \sin C \cos b} = \dfrac{\cos C + \cos B}{m \sin(b+c)} = \dfrac{\sin B \cos c - \sin C \cos b}{\cos C - \cos B} = \dfrac{m \sin(b-c)}{\cos C - \cos B}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin b \cos C + \sin c \cos B}{\cos c + \cos b} = \dfrac{M \sin(B+C)}{\cos c + \cos b} = \dfrac{\cos c - \cos b}{\sin b \cos C - \sin c \cos B} = \dfrac{\cos c - \cos b}{M \sin(B-C)}. \end{cases}$$

Es ist aber auch

$$39.\quad \begin{cases} \sin^2 Q = \cos^2\frac{B+C}{2} + \sin B \sin C \cos^2\frac{b-c}{2}, \\ \sin^2 q = \sin^2\frac{b-c}{2} + \sin b \sin c \sin^2\frac{B+C}{2}, \\ \cos^2 Q = \sin^2\frac{B-C}{2} + \sin B \sin C \sin^2\frac{b-c}{2}, \\ \cos^2 q = \cos^2\frac{b+c}{2} + \sin b \sin c \cos^2\frac{B+C}{2}, \\ \cos^2 p - \cos^2 Q = \cos^2\frac{B+C}{2} + \sin B \sin C \cos^2\frac{b+c}{2}, \\ \cos^2 p - \cos^2 q = \sin^2\frac{b-c}{2} + \sin b \sin c \sin^2\frac{B-C}{2}, \end{cases}$$

und es sind mithin $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}a$ durch B, C, b, c gefunden. Zwischen Q und q finden endlich noch die Relationen:

$$40.\quad \begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{\cos Q}{\cos q}, & \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)} = \sqrt{\left(\frac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 p - \cos^2 q}\right)}, \\ \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 Q)}}{\cos q}, & \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{\cos Q}{\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 q)}} \end{cases}$$

statt, welche den Gaufsischen Gleichungen ähnlich sind. Durch Einführung des Modulus erhält man aus ihnen

$$41.\quad \begin{cases} m = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)} \cdot \frac{\cos Q}{\cos q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 p - \cos^2 q}\right)} \\ \quad = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \frac{\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 Q)}}{\cos q} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)} \cdot \frac{\cos Q}{\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 q)}}, \end{cases}$$

und durch Substitution dieser Werthe in (38.) ergiebt sich:

$$42.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos q}, & \sin\frac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos Q}, \\ \cos\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos q}, & \cos\frac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos Q}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, denen noch vier andere entsprechen, welche den Modulus, und im Nenner statt der Cosinus von Q und q die Wurzelgröfsen enthalten, bilden gewissermafsen eine Erweiterung der Neperschen Analogieen, welche durch Division aus (42.) gefunden werden.

§. 11.

Andere nicht minder bemerkenswerthe Ausdrücke der Gröfsen A und a durch B, C, b, c findet man durch Einführung der Hülfswinkel:

$$43.\quad \begin{cases} \cos 2\mathfrak{A} = \cos 2B \cos 2C - \sin 2B \sin 2C \cos a, \\ \cos 2a = \cos 2b \cos 2c + \sin 2b \sin 2c \cos A. \end{cases}$$

Quadrirt man nemlich die Gleichungen (1.), so findet man:

$$44.\quad \begin{cases} \sin\mathfrak{A} = \sin A\cos p, \qquad \sin\mathfrak{a} = \sin a\cos p, \\ m^2 = \dfrac{\sin^2\mathfrak{A}}{\sin^2\mathfrak{a}} = \dfrac{\cos 2\mathfrak{A} - \cos 2A}{\cos 2\mathfrak{a} - \cos 2a}, \end{cases}$$

und, mit Hülfe dieser Werthe, aus (35.):

$$45.\quad \begin{cases} \sin\mathfrak{A} = \dfrac{\cos B\sin C\cos b + \sin B\cos C\cos c}{\cos p}, \\ \sin\mathfrak{a} = \dfrac{\cos b\sin c\cos B + \sin b\cos c\cos C}{\cos p}. \end{cases}$$

Hat man so $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ aus den Gröfsen B, C, b, c gefunden, so geben die Gleichungen (43.) folgende Resultate:

$$46.\quad \begin{cases} \sin^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin(\mathfrak{a}+b-c)\sin(\mathfrak{a}-b+c)}{\sin 2b\sin 2b}, & \sin^2\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(-\mathfrak{A}+B+C)}{\sin 2B\sin 2C}, \\ \cos^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin(\mathfrak{a}+b+c)\sin(-\mathfrak{a}+b+c)}{\sin 2b\sin 2c}, & \cos^2\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(\mathfrak{A}-B+C)}{\sin 2B\sin 2C}, \\ \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin(\mathfrak{a}+b-c)\sin(\mathfrak{a}-b+c)}{\sin(\mathfrak{a}+b+c)\sin(-\mathfrak{a}+b+c)}, & \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(-\mathfrak{A}+B+C)}{\sin(\mathfrak{A}+B-C)\sin(\mathfrak{A}-B+C)}; \end{cases}$$

$$47.\quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{2\sqrt{[\sin(\mathfrak{a}+b+c)\sin(\mathfrak{a}+b-c)\sin(\mathfrak{a}-b+c)\sin(-\mathfrak{a}+b+c)]}}{\sin 2b\sin 2c}, \\ \cos A = \dfrac{M\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{4\sqrt{[\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(\mathfrak{A}+B-C)\sin(\mathfrak{A}-B+C)\sin(-\mathfrak{A}+B+C)}}, \\ \sin a = \dfrac{2\sqrt{[\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(\mathfrak{A}+B-C)\sin(\mathfrak{A}-B+C)\sin(-\mathfrak{A}+B+C)]}}{\sin 2B\sin 2C}, \\ \cos a = \dfrac{m.\sin 2a\sin 2b\sin 2c}{4\sqrt{[\sin(\mathfrak{a}+b+c)\sin(\mathfrak{a}+b-c)\sin(\mathfrak{a}-b+c)\sin(-\mathfrak{a}+b+c)]}}, \end{cases}$$

und hieraus endlich erhält man:

$$48.\quad m.\frac{\cos B\cos C}{\cos b\cos c} = \sqrt{\left(\frac{\sin(\mathfrak{A}+B+C)\sin(\mathfrak{A}+B-C)\sin(\mathfrak{A}-B+C)\sin(-\mathfrak{A}+B+C)}{\sin(\mathfrak{a}+b+c)\sin(\mathfrak{a}+b-c)\sin(\mathfrak{a}-b+c)\sin(-\mathfrak{a}+b+c)}\right)}.$$

Die Gleichungen (35.) geben auch noch folgende Formeln:

$$49.\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tang}B\cos c - \operatorname{tang}C\cos b}{\operatorname{tang}B\cos c + \operatorname{tang}C\cos b} = \dfrac{\operatorname{tang}b\cos C - \operatorname{tang}c\cos B}{\operatorname{tang}b\cos C + \operatorname{tang}c\cos B} = \dfrac{\cos 2C - \cos 2B}{1-\cos 2\mathfrak{A}} = \dfrac{\cos 2c - \cos 2b}{1-\cos 2\mathfrak{a}}, \\ \dfrac{\cos B\cos b}{\cos C\cos c}\cdot\dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{\cos B\cos b}{\cos C\cos c}\cdot\dfrac{\sin c}{\sin b} = \dfrac{1-\cos 2\mathfrak{A}+\cos 2B-\cos 2C}{1-\cos 2\mathfrak{A}-\cos 2B+\cos 2C} = \dfrac{1-\cos 2\mathfrak{a}+\cos 2b-\cos 2c}{1-\cos 2\mathfrak{a}-\cos 2b+\cos 2c}. \end{cases}$$

Werden nach (43.) die analogen Ausdrücke für $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gebildet, so erhält man:

$$50.\quad \begin{cases} M^2\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2\mathfrak{A} = \sin^2 B - \sin^2\mathfrak{B} = \sin^2 C - \sin^2\mathfrak{C}, \\ m^2\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c = \sin^2 a - \sin^2\mathfrak{a} = \sin^2 b - \sin^2\mathfrak{b} = \sin^2 c - \sin^2\mathfrak{c}. \end{cases}$$

und hieraus können neue Relationen zwischen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ab-

geleitet werden, deren weitere Verfolgung jedoch die Grenzen dieses Aufsatzes überschreiten würde.:

§. 12.

Wird in den Gleichungen (8.) statt $\sin A$ und $\sin a$, der entsprechende Werth aus (35.) substituirt, so ergiebt sich, mit Hülfe von (38.) und (42.)

51.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = \frac{2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\sin b\cos c\cos C-\cos b\sin c\cos B}\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 q)} \\
\qquad\qquad = \frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\cos q}, \\
\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = \frac{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\sin b\cos c\cos C-\cos b\sin c\cos B}\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 q)} \\
\qquad\qquad = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\cos q}, \\
\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = 2\cos q\,\frac{\cos C\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos B\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos C\sin b\cos c-\cos B\cos b\sin c} \\
\qquad\qquad = \frac{\cos C\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos B\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 q)}}, \\
-\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = 2\cos q\,\frac{\cos C\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c-\cos B\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos C\sin b\cos c-\cos B\cos b\sin c} \\
\qquad\qquad = \frac{\cos C\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c-\cos B\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 q)}}, \\
\tang\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ) = \frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\cos C\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos B\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\left(\frac{\cos^2 p-\cos^2 q}{\cos^2 q}\right)}, \\
-\tang\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ) = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin(B+C)}{\cos C\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c-\cos B\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\left(\frac{\cos^2 p-\cos^2 q}{\cos^2 q}\right)};
\end{array}\right.$$

52.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\cos c\sin B\cos C-\cos b\cos B\sin C}2\cos Q \\
\qquad\qquad = \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 Q)}}, \\
\sin\frac{1}{2}(-a+b+c) = \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\cos c\sin B\cos C-\cos b\cos B\sin C}2\cos Q \\
\qquad\qquad = \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 Q)}}, \\
\cos\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\cos b\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C-\cos c\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos c\sin B\cos C-\cos b\cos B\sin C}2\sqrt{(\cos^2 p-\cos^2 Q)} \\
\qquad\qquad = \frac{\cos b\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C-\cos c\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos Q},
\end{array}\right.$$

$$52.\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}(-a+b+c) = \dfrac{\cos c \sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C - \cos b\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos c\sin B\cos C - \cos b\cos B\sin C}\,2\sqrt{(\cos^2 p - \cos^2 Q)} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\cos c\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C - \cos b\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos Q}. \\ \tan\frac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\cos b\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C - \cos c\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 Q}\right)}, \\ \tan\frac{1}{2}(-a+b+c) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\sin(b+c)}{\cos c\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C - \cos b\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 Q}\right)}. \end{cases}$$

Für die Tangenten hat man auch

$$53.\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}(A+B+C-180°) = \dfrac{\sin(B+C)}{\cos C\cot\frac{1}{2}c - \cos B\cot\frac{1}{2}b}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 q}{\cos^2 q}\right)}, \\ -\tan\frac{1}{2}(-A+B+C+180°) = \dfrac{\sin(B+C)}{\cos C\tan\frac{1}{2}c - \cos B\tan\frac{1}{2}b}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 q}{\cos^2 q}\right)}, \\ \tan\frac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{\sin(b+c)}{\cos b\tan B\frac{1}{2} - \cos c\tan\frac{1}{2}C}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 Q}\right)}, \\ \tan\frac{1}{2}(-a+b+c) = \dfrac{\sin(b+c)}{\cos c\cot\frac{1}{2}C - \cos b\cot\frac{1}{2}B}\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2 p - \cos^2 Q}{\cos^2 Q}\right)}. \end{cases}$$

Durch Division je zweier dieser Ausdrücke erhält man

$$54.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)} = \tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c, \\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)} = \dfrac{\cos C\tan\frac{1}{2}b - \cos B\tan\frac{1}{2}c}{\cos C\tan\frac{1}{2}c - \cos B\tan\frac{1}{2}b}, \\ \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{-\tan\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)} = \dfrac{\cos C\tan\frac{1}{2}c - \cos B\tan\frac{1}{2}b}{\cos C\cot\frac{1}{2}c - \cos B\cot\frac{1}{2}b}, \\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)} = \cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C, \\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)} = \dfrac{\cos b\tan\frac{1}{2}B - \cos c\tan\frac{1}{2}C}{\cos c\tan\frac{1}{2}B - \cos b\tan\frac{1}{2}B}, \\ \dfrac{\tan\frac{1}{2}(a+b+c)}{\tan\frac{1}{2}(-a+b+c)} = \dfrac{\cos c\cot\frac{1}{2}C - \cos b\cot\frac{1}{2}B}{\cos b\tan\frac{1}{2}B - \cos c\tan\frac{1}{2}C}. \end{cases}$$

Einen eigenthümlichen Ausdruck zur Bestimmung von A und a durch B, C, b, c findet man durch Addition und Subtraction der Gleichungen (33.); nemlich:

$$55.\quad \begin{cases} \dfrac{\cos C\cos b + \cos B\cos c}{\sin b + \sin c} = (m-1)\tan\dfrac{A+a}{2} = (m+1)\tan\dfrac{A-a}{2}, \\ \dfrac{\cos C\cos b - \cos B\cos c}{\sin b - \sin c} = (m+1)\cot\dfrac{A+a}{2} = (m-1)\cot\dfrac{A-a}{2}. \end{cases}$$

§. 13.

Man bezeichne endlich durch R und r die sphärischen Radien der kleinen, um und in das Dreieck beschriebenen Kreise, so findet man aus

den eleganten Ausdrücken, welche Hr. Prof. Clausen im sechsten Bande dieses Journals für die Functionen von R und r gegeben hat, folgende Formeln, welche zugleich an einem auffallenden Beispiele zeigen, welche grofse Abkürzungen der Gebrauch des Modulus herbeiführt:

$$56.\quad \left\{\begin{aligned}\cot R &= \frac{\sin A \sin B \sin C}{2m.\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)} = 2m\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180°)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c},\end{aligned}\right.$$

$$57.\quad \left\{\begin{aligned}\operatorname{tang} r &= \frac{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{m} = \frac{m\sin a\sin b\sin c}{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\cot\frac{1}{2}A}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\cot\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\cot\frac{1}{2}C},\end{aligned}\right.$$

$$58.\quad \left\{\begin{aligned}m &= \frac{\cot R}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a\sin b\sin c}\operatorname{tang} r\\ &= \frac{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\operatorname{tang} r} = \frac{\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}\operatorname{tang} R.\end{aligned}\right.$$

Durch Multiplication je zweier dieser Gleichungen, und angemessene Substitutionen aus den bisher gefundenen Formeln, gelangt man zu folgenden, noch ganz unbekannten Ausdrücken:

$$59.\quad \left\{\begin{aligned}&\operatorname{tang} R\operatorname{tang} r\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}{m\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)}{m\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{m^2.\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B+\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C-1}{2}\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{m^2.\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+c)\cos\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{2}{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}c+\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c-1}\\ &= \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C}{m\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B+\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C-1}{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}c+\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c-1}\right)}\\ &= \frac{-1}{m^2}.\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C-180°)+\cos\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)+\cos\frac{1}{2}(A-B+C+180°)+\cos\frac{1}{2}(A+B-C+180°)}{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}\\ &= m\frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)-\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180°)+\sin\frac{1}{2}(A-B+C+180°)+\sin\frac{1}{2}(A+B-C+180°)-\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180°)}\\ &= \frac{1}{m^2}.\frac{\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C-180°)}{\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)},\end{aligned}\right.$$

$$M = \frac{\cot\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}B + \cot\frac{1}{2}C - \cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a + \operatorname{tang}\frac{1}{2}b + \operatorname{tang}\frac{1}{2}c - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}.$$

Die Zahl dieser Ausdrücke könnte noch sehr vermehrt werden, wenn man die goniometrischen Relationen zwischen den Functionen dreier Winkel zu Hülfe nehmen wollte. Leider sind die letztern bis jetzt noch so wenig untersucht, dafs man dieselben eher umgekehrt aus der sphärischen Trigonometrie ableiten müfste. Die Resultate, welche man erhält, sind gröfstentheils sehr elegant, dürften sich jedoch aus den bis jetzt bekannten Formeln nur schwer beweisen lassen. Als Beispiel mögen folgende dienen:

$$61.\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)}\\
&= \frac{-\sin\frac{1}{2}(a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)-\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}\\
&= \frac{-\cos\frac{1}{2}(a+b+c)-\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)},\\
&\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}{\cot R}\\
&= \frac{-\sin\frac{1}{2}(a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)};
\end{aligned}\right.$$

$$62.\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)}{\cot R}\\
&= \frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)-\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{-\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)-\cos\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&= \frac{-\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)+\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)+\cos\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&= \frac{\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)-\cos\frac{1}{2}(a+b-c)-\cos\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)-\sin\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)+\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&= \frac{\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)-\cos\frac{1}{2}(a-b+c)+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)-\cos\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)-\sin\frac{1}{2}(a+b-c)+\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}
\end{aligned}\right.$$

u. s. w. Endlich bemerke man noch für den Modulus den Ausdruck:

$$m^2 = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(-A+B+C+180^\circ)+\sin^2\frac{1}{2}(A-B+C+180^\circ)+\sin^2\frac{1}{2}(A+B-C+180^\circ)+\sin^2\frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}{\sin^2\frac{1}{2}(-a+b+c)+\sin^2\frac{1}{2}(a-b+c)+\sin^2\frac{1}{2}(a+b-c)+\sin^2\frac{1}{2}(a+b+c)}.$$

Das bisher gesagte wird hinreichend darthun, welch eine unerschöpfliche Menge von Relationen das sphärische Dreieck darbietet; zugleich aber kann man auch daraus entnehmen, wie die zur Rechnung

dienenden Formeln keinesweges die wichtigsten sind, oder sich etwa vor allen andern darbieten. Es kann daher nur den einfachen Gang der Entwicklung stören, wenn man dieselben zuerst vor allen andern, oder ganz allein, suchen will. Überdies werden alle diese Formeln, wenigstens die der ersten acht Paragraphen, auf einem so elementaren Wege gefunden, dafs ihre Ableitung auch dem Anfänger nicht schwierig fallen kann; und es wäre daher wohl zu wünschen, dafs die Lehrbücher der Trigonometrie mehr von den gegebenen Resultaten aufnähmen, als es bisher zu geschehen pflegte, um so mehr, als gerade die sphärische Trigonometrie, bei zweckmäfsiger Behandlung, geeignet zu sein scheint, dem Anfänger Sicherheit und Gewandheit im analytischen Calcul zu erschaffen.

8.

Einige mathematische Sätze.

(Von Herrn *S. Loewenstern*, Cand. philos. zu Dorpat.)

(Schlufs des Aufsatzes No. 3. im vorigen Hefte.)

II.

Über die Bestimmung des Werthes des Kettenbruchs $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}}\ldots$ nach der Zahl der Glieder *).

§. 1. Es sei x die Anzahl der Glieder des Kettenbruches, und $\psi(x)$ die zu bestimmende Function, so findet man, *per inductionem*:

$$1. \qquad \psi(x) = \frac{\varphi(x-1)}{\varphi(x)},$$

so, dafs, wenn im Allgemeinen s eine ganze positive Zahl,

$$(x-m)_c^{:s} = \frac{(x-m)}{1}\,\frac{(x-m-1)}{2}\,\frac{(x-m-2)}{3}\ldots\frac{(x-m-s+1)}{s}\ **)$$

und $r = \frac{x}{2}$ oder $\frac{x-1}{2}$ ist, je nachdem x grade oder ungerade ist:

$$2. \quad \varphi(x) = a^x + (x-1)_c^{:x-2}\,a^{x-2} + (x-2)_c^{:x-4}\,a^{x-4}\ldots + (x-r)_c^{:x-2r}\,a^{x-2r};$$

ein Ausdruck der nur dann reell, wenn x eine ganze positive Zahl zwischen Null und Unendlich, oder Null seibst ist.

Um sich von der Richtigkeit dieser Formel zu überzeugen, bemerke man, dafs man, wenn man in $\psi(x+1) = \frac{1}{a+\psi(x)}$, unter der Voraussetzung, dafs (1.) für alle positive ganze Zahlen von $x=1$ bis $x=x$ wahr sei, für $\psi(x)$, $\frac{\varphi(x-1)}{\varphi(x)}$ substituirt, erhält:

$$\psi(x+1) = \frac{\varphi(x)}{a\varphi(x)+\varphi(x-1)}.$$

*) Man sehe pag. 87. des III^ten^ Bandes des gegenwärtigen Journals.

**) So bezeichnet Bartels.

Allein man findet, nachdem man für $\varphi(x)$ und $\varphi(x-1)$ ihre entwickelten Werthe gesetzt hat, vermöge der Bemerkung, dafs allgemein

$$m_c^{:s} + m_c^{:s-1} = (m+1)_c^{:s},$$

wenn s eine ganze, positive Zahl ist:

$$3. \quad \varphi(x+1) = a\varphi(x) + \varphi(x-1).$$

Daher $\psi(x+1) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$; also ist auch dann (1.) für $x = x+1$ wahr. Nun ist es aber für $x = 1$ wahr, also auch für $x = 2$, etc., und endlich für x gleich jeder ganzen, positiven Zahl.

Wenn man von $\varphi(x)$, als zur Bestimmung des Werthes des Kettenbruches nöthig, abstrahirt, so kann man dem Ausdrucke derselben eine allgemeinere Form geben, so, dafs er für jeden reellen Werth von x brauchbar sei, wie auch (3.) statt finde; nemlich:

$$4. \quad \varphi(x) = a^x + (x-1)a^{x-2} + (x-2)_c^{:2}a^{x-4} + (x-3)_c^{:3}a^{x-6}:$$

eine Reihe welche sich schliefst, sobald x eine ganze positive Zahl ist, mit $(x-r)_c^{:r}$, wenn r dieselben Werthe wie in (2.) hat, und sich sodann transformiren läfst, indem man in Betracht ziehet, dafs

$$(x-p)_c^{:p} = (x-p)_c^{:(x-p)-p} = (x-p)_c^{:x-2p},$$

wo p eine ganze positive Zahl und kleiner als $\frac{x+2}{2}$ oder $\frac{x+1}{2}$, je nachdem x grade oder ungerade ist. Ferner, wenn man nach und nach in (3.) $x = 1, = 0, = -1$, etc., macht, so findet man $\varphi(0) = 1$, $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(-2) = \varphi(0)$, $\varphi(-3) = -\varphi(1)$, $\varphi(-4) = \varphi(2.)$, $\varphi(-5) = -(3)$, etc.

§. 2. Zufolge der Betrachtungen im vorhergehenden §. lassen sich mehrere Eigenschaften dieser Function finden. Denn setzt man in (3.) für a, $\varphi(1)$, so ist

$$\varphi(x) = \varphi(1)\varphi(x-1) + \varphi(x-2).$$

Substituirt man in dieser Gleichung für $\varphi(x-1)$, $\varphi(1)\varphi(x-2) + \varphi(x-3)$, so folgt $\varphi(x) = (\varphi(1)\varphi(1) + \varphi(0))\varphi(x-2) + \varphi(1)\varphi(x-3) = \varphi(2)\varphi(x-2) + \varphi(1)\varphi(x-3)$; substituirt man wiederum in dieser letzten Gleichung für $\varphi(x-2)$, $\varphi(1)\varphi(x-3) + \varphi(x-4)$, so erhält man $\varphi(x) = (\varphi(1)\varphi(2) + \varphi(1))\varphi(x-3) + \varphi(2)\varphi(x-4) = \varphi(3)\varphi(x-3) + \varphi(2)\varphi(x-4)$. Man siehet hieraus, dafs nothwendigerweise, nach $(y-1)$ auf einander folgenden Substitutionen,

$$\varphi(x) = \varphi(y)\varphi(x-y) + \varphi(y-1)\varphi(x-y-1).$$

Setzt man in diese letzte Gleichung für x, $x+y$, so folgt:

5. $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)+\varphi(x-1)\varphi(y-1)$,

so, dafs x oder y, wie aus der Ableitung zu ersehen ist, eine ganze positive Zahl sein mufs.

Macht man in (5.) $y=-(x+1)$, so ergiebt sich:

$$\varphi(x)\varphi(-x-1)+\varphi(x-1)\varphi(-x-2) = \varphi(-1) = 0;$$

daher denn $\frac{\varphi(-x-1)}{\varphi(-x-2)} = -\frac{\varphi(x-1)}{(\varphi x)}$, und x nothwendig eine ganze, und zwar positive Zahl ist. Man hat also $\varphi(-x-1) = \pm\lambda\varphi(x-1)$, und $\varphi(-x-2) = \pm\lambda\varphi(x)$, wo λ ein unbestimmter Coefficient, für welchen aus §. 1., ± 1 folgt, je nachdem x gerade oder ungerade ist. Daher

6. $\varphi(-u) = \pm\varphi(u-2)$,

so, dafs *plus* zu nehmen ist, wann u eine gerade positive Zahl, und *minus*, wenn u eine ungerade positive Zahl ist. Hieraus folgt, wenn man in (4.) statt $+y$, $-y$ setzt, dafs:

7. $\varphi(x-y) = \pm\varphi(x)\varphi(y-2)\mp\varphi(x-1)\varphi(y-1)$,

so, dafs die oberen Zeichen zu nehmen sind, wenn y gerade, und die untern, wenn y ungerade ist, und x und y ganze positive Zahlen sein müssen.

Und aus (5.), (6.) und (7.) folgt:

8. $\left.\begin{array}{l}\varphi(x+y)\pm\varphi(x-y) = \varphi(x)(\varphi(y)+\varphi(y-2)) \text{ und}\\ \varphi(x+y)\mp\varphi(x-y) = \varphi(y-1)(\varphi(x+1)+\varphi(x-1)),\end{array}\right.$

unter derselben Bedingung, wie in (7.).

§. 3. Wenn man in $\varphi(x) = a\varphi(x-1)+\varphi(x-2)$, für $\varphi(x-2)$, $a\varphi(x-3)+\varphi(x-4)$ substituirt, sodann für $\varphi(x-4)$, $a\varphi(x-5)+\varphi(x-6)$, und diese Substitutionen bis $\varphi(x-2q)$ (*exclusive*) fortsetzt, wo q irgend eine ganze positive Zahl ist: so erhält man:

$$\varphi(x) = a(\varphi(x-1)+\varphi(x-3)+\varphi(x-5)\ldots.+\varphi(x-2q+1))+\varphi(x-2q).$$

Substituirt man ferner, in der so erhaltenen Gleichung, für $\varphi(x-1)$, $a\varphi(x-2)$ $+\varphi(x-3$, sodann für $\varphi(x-3)$, $a\varphi(x-4)+\varphi(x-5)$, u. s. w. bis $\varphi(x-2q+1)$ (*exclusive*), so findet man:

$$\varphi(x) = a^2(\varphi(x-2)+2\varphi(x-4)+3\varphi(x-6)\ldots.+(q-1)\varphi(x-2q+2)) + q\,a\varphi(x-2q+1)+\varphi(x-2q).$$

Fährt man auf die vorige Weise fort, so erhält man, wenn $n<q+1$ und eine ganze positive Zahl ist:

9. $$\Phi(x) = a^n(\Phi(x-n)+n\Phi(x-n-2)+(n+1)_c^{:2}\Phi(x-n-4)$$
$$+(n+2)_c^{:3}\Phi(x-n-6)\ldots+(q-1)_c^{:n-1}\Phi(x-2q+n))$$
$$+\Phi(x-2q)+q\,a\Phi(x-2q+1)+q_c^{:2}a^2\Phi(x-2q+2)$$
$$+q_c^{:3}a^3\Phi(x-2q+3)\ldots+q_c^{:n-1}a^{n-1}\Phi(x-2q+n-1),$$

wo x jede reelle Zahl sein kann.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dafs 1, n, $(n+1)_c^{:2}$, $(n+2)_c^{:3}$ u. s. w. auf einander folgende figurirte Zahlen der n^{ten} Ordnung sind, und 1, q, $q_c^{:2}$, $q_c^{:3}$, u. s. w. die Binomialcoëfficienten der q^{ten} Potenz, der Folge nach.

Setzt man in (9.) $n=q$, so ergiebt sich:

10. $$\Phi(x) = \Phi(x-2q)+q\,a\Phi(x-2q+1)+q_c^{:2}a^2\Phi(x-2q+2)$$
$$+q_c^{:3}\Phi(x-2q+3)\ldots+q_c^{:q-2}a^{q-2}\Phi(x-q+2)+q_c^{:q-1}a^{q-1}\Phi(x-q+1)$$
$$+q_c^{:q}a^q\Phi(x-q).$$

für x, wie in (9.).

§. Vergleicht man die Coëfficienten in (4.), für den Fall, wo x eine ganze positive Zahl ist, mit der Tabelle der Binomialcoëfficienten:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.

so findet sich, dafs sie, der Ordnung nach, dieselben Zahlen sind, die sich in der Zeile finden, welche schräg von der $(x+1)$ bis zur $(x-r+1)$ horizontalen Reihe, von oben gezählt, gehet, und dafs die Summe dieser Coëffizienten $\Phi(x)$ ist, wenn man darin $a=1$ setzt; also der Nenner oder Zähler des erzeugenden Bruches eines Kettenbruches, dessen Glieder von der Form $\frac{1}{1}$, und deren Zahl x oder $x+1$ ist.

Endlich will ich noch bemerken, dafs die Reihe

0, $\Phi(0)$, $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, $\Phi(3)$, $\Phi(4)$, $\Phi(5)$, u. s. w.

eine wiederkehrende ist, für welche $\varphi x - a\Phi(x-1)-\Phi(x-2)=0$. Man findet daher, durch Summation, für $a=1$:

11. $$\Phi(x+1)=\Phi(x-1)+\varphi(x-2)+\Phi(x-3)\ldots+\Phi(2)+\Phi(1)+\varphi(0)+1.$$

III.

Einiges über die Flächen.

Erster Lehrsatz. Wenn man aus einem beliebigen Puncte einer (leitenden) Fläche, deren Gleichung

$$1. \quad Ax^n + By^n + Cz^n = L$$

ist, nach einem beliebigen Puncte einer zweiten (erzeugenden) Fläche, deren Gleichung

$$2. \quad A(x-p)^n + B(y-q)^n + C(z-r)^n = M$$

ist (in welchen Gleichungen A, B, C, L, M, beliebige reelle Gröfsen, jedoch L und M nicht negativ sind: n eine ganze Zahl, x, y, z, die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Oberflächen, und p, q, r, diejenigen eines bestimmten Punctes in Bezug auf das nemliche, nicht nothwendig rechtwinklige Axensystem bezeichnen), eine gerade Linie ziehet, und sie in dem bestimmten Puncte an der Fläche als unveränderlich fest ansieht; ferner die Linie, indem ihre Länge dieselbe bleibt, mit sich selbst parallel so herum führt, dafs sie mit dem andern Endpuncte nach und nach alle Puncte der ersten (leitenden) Fläche berührt: so entsteht durch die auf einander folgenden Durchschnitte der herum geführten Fläche (der erzeugenden), wenn n ungerade ist, eine Fläche, deren Gleichung

$$3. \quad A(x-p')^n + B(y-q')^n + C(z-r)^n = (L^{\frac{1}{n}} + M^{\frac{1}{n}})^n$$

ist, und wenn n gerade ist, entstehen zwei Flächen, deren Gleichungen in

$$4. \quad A(x-p')^n + B(y-q')^n + C(z-r')^n = (L^{\frac{1}{n}} \pm M^{\frac{1}{n}})^n$$

enthalten sind, wo

$$5. \quad p' = p-a, \quad q' = q-b, \quad r' = r-c,$$

und a, b, c, respective die Werthe von x, y, z, der Coordinaten desjenigen Punctes der leitenden Fläche sind, aus welcher die Linie gezogen wurde.

Beweis. Der Deutlichkeit halber wollen wir den einen Endpunct der herumgeführten Linie, der die leitende Fläche berührt, zum Anfangs-Puncte eines dem angenommenen parallelen Hilfs-Axensystems machen, so, dafs also, durch die parallele Fortbewegung der Linie, auch dieses Axensystem sich selbst parallel fortbewegt. In Bezug nun auf dieses Hilfs-Axensystem wird die Gleichung der erzeugenden Fläche sein:

$$A(x'-p')^n + B(y'-q')^n + C(z'-r')^n = M,$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines Punctes dieser Fläche in Bezug auf das

Hilfs-Axensystem bedeuten, und p', q', r' und die übrigen Buchstaben bereits bekannte Gröfsen bezeichnen.

Hieraus gehet hervor: dafs die Coordinaten p, q, r, während der Bewegung der erzeugenden Fläche, als veränderlich betrachtet werden müssen, und für jeden Moment der Bewegung

$$7. \qquad p = p' + \alpha, \quad q = q' + \beta, \quad r = r' + \gamma$$

sein werden, wenn α, β, γ die Coordinaten des Punctes sind, in welchem die Linie in diesem Momente die leitende Fläche berührt.

Setzt man nun diese Werthe von p, q, r in die Gleichung der erzeugenden Fläche, in Bezug auf das erste Axensystem, so erhält man:

$$8. \qquad A(x-p'-\alpha)^n + B(y-q'-\beta)^n + C(z-r'-\gamma)^n = M.$$

Verfährt man nach der bekannten Methode, um die Gleichung der erzeugten Fläche oder Flächen zu finden, so mufs man die Gleichung (8.), in Bezug auf α, β, γ, differentiiren, indem man x, y, z als constant betrachtet, und erhält sodann:

$$9. \qquad A(x-p'-\alpha)^{n-1} d\alpha + B(y-q'-\beta)^{n-1} d\beta + C(z-r'-\gamma)^{n-1} d\gamma = 0;$$

und auch die Gleichung der leitenden Fläche, nachdem man in dieselbe statt x, y, z, resp. α, β, γ gesetzt hat, wodurch sie

$$10. \qquad A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n = L$$

wird. In Bezug auf α, β, γ differentiirt, ergiebt sich die Gleichung

$$11. \qquad A\alpha^{n-1} d\alpha + B\beta^{n-1} d\beta + C\gamma^{n-1} d\gamma = 0.$$

Aus den Gleichungen (9.) und (11.) folgt:

$$12. \qquad \left(\frac{x-p'-\alpha}{\alpha}\right)^{n-1} = \left(\frac{y-q'-\beta}{\beta}\right)^{n-1} = \left(\frac{z-r'-\gamma}{\gamma}\right)^{n-1}.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung (7.) oder (9.) erschliefst man die Nothwendigkeit (n mag grade oder ungrade sein), dafs immer

$$13. \qquad \frac{x-p'-\alpha}{\alpha} = \frac{y-q'-\beta}{\beta} = \frac{z-r'-\gamma}{\gamma};$$

daher

$$14. \qquad \frac{\alpha}{x-p'} = \frac{\beta}{y-q'} = \frac{\gamma}{z-r'} = \lambda,$$

wo λ eine noch zu bestimmende Gröfse ist.

Substituirt man die aus den Gleichungen (14.) gefolgerten Werthe von α, β, γ, in die Gleichung (8.) und reducirt, so findet man, indem man setzt:

$$15. \qquad A(x-p')^n + B(y-q')^n + C(z-r')^n = S,$$

$$16. \qquad (1-\lambda)^n S = M.$$

Allein

$$17. \quad \lambda^n = \frac{A\alpha^n}{A(x-p')^n} = \frac{B\beta^n}{B(y-q')^n} = \frac{C\gamma^n}{C(z-r')^n} = \frac{L}{S};$$

also

$$18. \quad \lambda = \pm \frac{L^{\frac{1}{n}}}{S^{\frac{1}{n}}},$$

in dieser und in den folgenden Gleichungen mufs von den doppelten Vorzeichen nur plus allein genommen werden, wenn n ungerade ist.

Den Werth von λ aus der Gleichung (18.) in die Gleichung (16.) substituirt, giebt

$$19. \quad S^{\frac{1}{n}} \pm L^{\frac{1}{n}} = M;$$

daher

$$20. \quad S^{\frac{1}{n}} = M^{\frac{1}{n}} \pm L^{\frac{1}{n}},$$

oder

$$21. \quad S = \left(L^{\frac{1}{n}} \pm M^{\frac{1}{n}}\right)^n;$$

und so ergeben sich, vermöge (15.), die Gleichungen (3.) und (4.).

Erste Anmerkung. Wenn man die Gleichungen (3.) und (4.) mit (1.) und (2.) vergleicht, so ergiebt sich:

1) Dafs wenigstens Eine Fläche erzeugt wird, die der leitenden und erzeugenden ähnlich ist, wenn L und M nicht Null sind.

2) Dafs nur Eine Fläche entstehet, die der erzeugenden oder der leitenden allein, oder beiden zugleich, gleich und ähnlich ist, je nachdem L oder M allein, oder beide Null sind.

Zweiter Lehrsatz. Wenn man den ersten Lehrsatz nur dahin abändert, dafs die Gleichung der leitenden Fläche

$$22. \quad Ax^n + By^n + Hz = 0,$$

und die der erzeugenden

$$23. \quad A(x-p)^n + B(y-q)^n + K(z-r) = 0$$

ist, in welchen Gleichungen H und K zwei beliebige reelle, jedoch nicht negative Gröfsen, die übrigen Buchstaben aber dasselbe anzeigen, wie im ersten Lehrsatze: so entstehen, wenn n ungerade ist, zwei Flächen, deren Gleichungen enthalten sind in:

$$24. \quad A(x-p')^n + B(y-q')^n + \left(H^{\frac{1}{n-1}} \pm K^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}(z-r') = 0,$$

und wenn n gerade ist, entstehet eine Fläche, deren Gleichung

$$25. \quad A(x-p')^n + B(y-q')^n + \left(H^{\frac{1}{n-1}} \pm K^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}(z-r') = 0,$$

wo p', q', r', dieselbe Bedeutung wie im ersten Lehrsatze haben.

Beweis. Um auch hier nicht zu wiederholen, was schon in der Einleitung zum Beweise des ersten Lehrsatzes gesagt worden ist, so werde, auf dieselbe zurückweisend, hier sogleich statt der Gleichung (22.) die Gleichung

$$26. \quad A\alpha_n + B\beta^n + H\gamma = 0,$$

und statt der Gleichung (23.) die Gleichung

$$27. \quad A(x-p'-\alpha)^n + B(y-q'-\beta)^n + K(z-r'-\gamma) = 0$$

geschrieben.

Diese Gleichungen differentiirt, geben resp.

$$28. \quad nA\alpha^{n-1}d\alpha + nB\beta^{n-1}d\beta + Hd\gamma = 0,$$

und

$$29. \quad nA(x-p'-\alpha)^{n-1}d\alpha + nB(y-q'-\beta)^{n-1}d\beta + Kd\gamma = 0.$$

Aus den Gleichungen (28.) und (29.) schliefst man:

$$30. \quad \left(\frac{x-p'-\alpha}{\alpha}\right)^{n-1} = \left(\frac{y-q'-\beta}{\beta}\right)^{n-1} = \frac{K}{H}.$$

Und aus diesen Gleichungen folgert man nothwendig: dafs

$$31. \quad \frac{x-p'-\alpha}{\alpha} = \frac{y-q'-\beta}{\beta};$$

daher

$$32. \quad \frac{\alpha}{x-p'} = \frac{\beta}{y-q'} = \lambda = \frac{H^{\frac{1}{n-1}}}{H^{\frac{1}{n-1}} \pm K^{\frac{1}{n-1}}},$$

wo + zu nehmen, wenn n gerade ist.

Setzt man nun die aus den Gleichungen (32.) gezogenen Werthe von α, β, in die Gleichungen (26.) und (29.), so erhält man, indem man in beiden Gleichungen den Werth von γ bestimmt:

$$33. \quad \frac{-\lambda^n(A(x-p')^n + B(y-q')^n}{H} = \frac{(1-\lambda)^n(A(x-p')^n + B(y-q')^n) + K(z-r'))}{K},$$

In diese Gleichung nun für λ seinen Werth aus (32.) gesetzt, und berücksichtiget, was in Hinsicht der Zeichen gesagt worden, findet man die Gleichungen (24.) und (25.).

Zweite Anmerkung. Vergleicht man die Gleichungen (24.) und (25.) mit den Gleichungen (22.) und (23.), so folgt:

1) Dafs, wenn weder H noch K Null ist, wenigstens Eine Fläche entstehet, die sowohl der leitenden als der erzeugenden ähnlich ist.

2) Dafs nur Eine Fläche erzeugt wird, die entweder der leitenden oder der erzeugenden allein, oder beiden zugleich gleich und ähnlich ist, je nachdem H oder K, oder beide Null sind.

Dritte Anmerkung. Es leuchtet ein, dafs in beiden Lehrsätzen jedes Axen-System, welches in fester Beziehung zur erzeugenden Fläche stehet, durch die parallele Fortbewegung der Verbindungslinie, auch mit sich selbst parallel fortbewegt wird.

Vierte Anmerkung. Wenn anfänglich der Punct (p, q, r) mit dem Puncte (a, b, c) der leitenden Fläche zusammen fällt, so folgt aus den Gleichungen (5.), da

$$34. \qquad p = a, \quad q = b, \quad r = c:$$

$$35. \qquad p' = q' = r' = 0.$$

Also verwandeln sich sodann die Gleichungen (3.), (4.), (24.) und (25.) resp. in

$$36. \qquad Ax^n + By^n + Cz^n = \left(L^{\frac{1}{n}} + M^{\frac{1}{n}}\right)^n,$$

$$37. \qquad Ax^n + By^n + Cz^n = \left(L^{\frac{1}{n}} \pm M^{\frac{1}{n_i}}\right)^n,$$

$$38. \qquad Ax^n + By^n + \left(H^{\frac{1}{n-1}} \pm K^{\frac{1}{n-1}}\right)^n z = 0,$$

$$39. \qquad Ax^n + By^n + \left(H^{\frac{1}{n-1}} + K^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} z = 0.$$

Zugleich ergieht sich in diesem Falle aus den Gleichungen (7.): dafs, wenn man gleich Anfangs den Punct (p, q, r) in fester Beziehung zur erzeugenden Fläche sich vostellt, dieser Punct, bei Fortbewegung der Fläche, immer auf der leitenden Fläche bleiben wird.

Fünfte Anmerkung. Da die Gleichungen zweier Flächen vom zweiten Grade, deren Hauptaxen einander parallel sind, in Bezug auf die Hauptaxen einer dieser Flächen, wenn sie im Allgemeinen einen Mittelpunct haben, auf die Form der Gleichungen (1.) und (2.), und wenn sie im Allgemeinen einen Scheitel haben, auf die der Gleichungen (22.) und (23.) gebracht werden können, so folgt: dafs die obigen Lehrsätze auf alle Flächen vom zweiten Grade anwendbar sind, und so ergiebt sich, vermöge der drei ersten Anmerkungen, folgender Lehrsatz:

Dritter Lehrsatz. Wenn man aus einem Puncte einer Fläche vom zweiten Grade nach einem Puncte einer anderen, jener ähnlichen Fläche, deren Hauptaxen den Hauptaxen jener resp. parallel sind, eine gerade Linie zieht, und sie in diesem Puncte an der Fläche als unveränderlich fest betrachtet: darauf die Linie, indem ihre Länge constant bleibt, so herum führt, dafs sie mit dem andern Endpuncte nach und nach

alle Puncte der ersten Fläche berührt, während sie mit sich selbst parallel bleibt, oder, was dasselbe ist, so, dafs die Hauptaxen der beiden Flächen resp. einander parallel bleiben: so entstehet durch die auf einander folgenden Durchschnitte der bewegten Fläche, wenigstens Eine jenen beiden ähnliche Fläche.

Sechste Anmerkung. Da die Gleichungen zweier parallelen Ebenen immer transformirt werden können in

$$40. \quad Ax+By+Cz=0,$$

und

$$41. \quad A(x-p)+B(y-q)+C(z-r)=0:$$

so erhält man, vermöge des ersten Lehrsatzes, und auch vermöge des zweiten, indem man $n=1$ setzt, für die erzeugte Fläche die Gleichung der erzeugenden Ebene; was sie wirklich sein mufs.

IV.

Beweis der Gleichung

$$1. \quad \frac{x}{n}(x+n-2)_c^{n-1,2}=(x+n-1)_c^{n,2}+\tfrac{1}{2}(x+n-3)^{n-2,2}+(\tfrac{1}{2})^{:2}(x+n-5)_c^{n-4,2}$$
$$+(\tfrac{1}{2})_c^{:3}(x+n-7)^{n-6,2}+\ldots.+(\tfrac{1}{2})_c^{:r}(x+n-2r-1)_c^{n-2r,2},\ ^*)$$

wenn allgemein

$$z_c^{\mu,\alpha}=\frac{z(z-\alpha).(z-2\alpha).(z-2\alpha)\ldots.(z-(\mu-1)\alpha)}{1\quad 2\qquad 3\qquad 4\qquad \ldots.\qquad \mu} \quad \text{und} \quad z_c^{\mu,1}=z_c^{:\mu},$$

μ eine ganze positive Zahl, und $n-2r=2$ oder 1, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Der Beweis dieser Gleichung läfst sich durch Induction führen, indem man zeigt: dafs, wenn die Gleichung wahr ist, für alle Werthe von n, von $n=1$ bis $n=n=$ irgend einer ganzen positiven Zahl, so wird sie auch für $n=n+1$ wahr sein; und zwar auf folgende Weise.

---

*) Die Gleichung nur allein, und so bezeichnet, findet sich im ersten Bande der mathem. Analysis von Bartels. Dorpat. *Schünmann.* 1833.

Aus der Gleichung (1.) folgt:

$$2.\quad \frac{x}{n+1}(x+n-1)_c^{n,2} = \frac{x^2}{n(n+1)}(x+n-2)_c^{n-1,2} - \frac{x}{n+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)(x+n-3)_c^{n-2,2}$$
$$- \frac{x}{+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:2}(x+n-5)_c^{n-4,2} - \frac{x}{n+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:3}(x+n-7)_c^{n-6,2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{x}{n+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{:r}(x-n-2r-1)^{n-2r,2}.$$

Aber aus der nemlichen Gleichung ergiebt sich, wenn man nach und nach darin $n = n-1$, $= n-3$, $= n-5$, bis $n = 1$ oder 2 (*inclusive*), je nachdem n gerade oder ungerade ist, setzt:

$$3.\quad \begin{cases} (x+n-3)_c^{n-2,2} \\ = \frac{n-1}{x}\left((x+n-2)_c^{n-1,2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x+n-4)_c^{n-3,2} + \left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}(x+n-6)_c^{n-5,2} + \ldots.\right), \\ (x+n-5)_c^{n-4,2} \\ = \frac{n-3}{x}\left((x+n-4)_c^{n-3,2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x+n-6)_c^{n-5,2} + \left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}(x+n-8)_c^{n-7,2} + \ldots.\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Substituirt man nun die so erhaltenen Werthe für $(x+n-3)_c^{n-2,2}$, $(x+n-5)_c^{n-4,2}$, u. s. w., in die Gleichung (2.), und ordnet sie auf die Weise, dafs die letzten Glieder der Werthe, die alle gleich sind, unter einander zu stehen kommen, so erhält man:

$$4.\quad \frac{x}{n+1}(x+n-1)_c^{n,2}$$
$$= \begin{cases} \frac{2x^2-n^2+n}{2n(n+1)}(x-n+2)_c^{n-1,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left((x+n-4)_c^{n-3,2} + \left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}(x+n-6)_c^{n-5,2} + \left(\frac{1}{2}\right)_c^{:3}(x+n-8)_c^{n-7,2} + \ldots.\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)\left((x+n-4)_c^{n-3} + \left(\frac{1}{2}\right)(x+n-6)_c^{n-5,2} + \left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}(x+n-8)_c^{n-7,2} + \ldots.\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}\left(\frac{n-5}{n+1}\right)\left((x+n-6)_c^{n-5,2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x+n-8)_c^{n-7,2} + \ldots.\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)_c^{:4}\left(\frac{n-7}{n+1}\right)\left((x+n-8)_c^{n-7,2} + \ldots.\right) \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nun ist

$$5.\quad \frac{2x^2-n^2+n}{2n(n+1)}(x+n-2)_c^{n-1,2} = \left(\frac{x^2-n^2}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\right)(x+n-2)_c^{n-1,2} = (x+n)_c^{n+1,2} + \tfrac{1}{2}(x+n-2)_c^{n-1,2};$$

ferner ist, wenn man durch P die Summe der Coëfficienten von $(x+n-2q)_c^{n-2q-1,2}$ in der Gleichung (4.) bezeichnet:

$$6.\quad -(n+1)P = (n-1)\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:q} + (n-3)\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:2}\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:q-1} + \ldots. + (n-2q+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:q}\tfrac{1}{2} + (n-2q-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)_c^{:q+1}.$$

Addirt man diese Gleichung, in umgekehrter Ordnung, zu sich selbst, so erhält man:

$$7.\quad \left\{\begin{aligned} &-2(n+1)P \\ &=2(n-q)\left((\tfrac{1}{2})_c^{:q+1}+(\tfrac{1}{2})_c^{:q}(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})_c^{:q-1}(\tfrac{1}{2})_c^{:2}+\ldots+(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})_c^{:q}+(\tfrac{1}{2})_c^{:q+1}\right)-2(n+1)(\tfrac{1}{2})_c^{:q+1} \\ &=2n(n-q)(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2})_c^{:q}-2(n+1)(\tfrac{1}{2})_c^{:q+1}=(1)_c^{:q+1}-2(n+1)(\tfrac{1}{2})_c^{:q+1}. \end{aligned}\right.$$

Da nun $(1)_c^{:q+1}=0$, wenn q eine ganze Zahl und gröſser als Null ist, so folgt, da q hier diese Eigenschaft hat, daſs

$$P=(\tfrac{1}{2})_c^{:q+1}.$$

Und so folgt, vermöge der Gleichungen (5.) und (8.), aus (4.), daſs,

$$\frac{x}{n+1}(x+n-1)_c^{n,2}=(x+n)_c^{n+1,2}+\tfrac{1}{2}(x+n-2)_c^{n-1,2}+(\tfrac{1}{2})_c^{2}(x+n-4)_c^{n-3}+\ldots.$$

Nun ist die Gleichung (1.) für $n=1$ wahr, also auch für $n=2$; daher auch für $n=3$, u. s. w.; und folglich für jede ganze positive Zahl.

Schlieſslich möchte noch zu bemerken sein, daſs allgemein auch

$$(x+n-5)_c^{n-5-1,2}=\frac{(x^2-(n-5)^2).(x^2-(n-5-2)^2).(x^2-(n-5-4)^2)\ldots.x \text{ oder } (x^2-1)}{n-5 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \ldots. \qquad n-5},$$

je nachdem $(n-5)$ eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist.

9.

Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Dr. phil.)

Da noch kein allgemein gültiges Criterium der Convergenz und Divergenz der Reihen gefunden worden ist, so habe ich eine Methode gesucht, nach welcher eine jede unendliche Reihe geprüft werden kann, ob sie einen endlichen Werth habe oder nicht; diese Methode ist in den folgenden Sätzen enthalten.

Ich nehme zu der Untersuchung folgende allgemeine Form einer Reihe, in welcher jedes Glied als Function seines Stellenzeigers betrachtet wird:

$$1. \quad \overset{1}{A}+\overset{2}{A}+\overset{3}{A}+\overset{4}{A}+\ldots.+\overset{k}{A}+\ldots.,$$

und setze voraus, dafs die Reihe von der Art sei, dafs, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden das nemliche Vorzeichen haben, welches positiv angenommen werden soll. Da auch jede Reihe, in welcher positive und negative Glieder vorkommen, sich in eine solche Reihe, durch Zusammenfassen mehrerer Glieder, verwandeln läfst, so reicht die Untersuchung der obigen Reihe für alle Reihen hin. Dafs kein Glied der Reihe unendlich sein darf, versteht sich von selbst.

Um nun zu bestimmen, ob die Reihe convergire oder divergire, das heifst: eine endliche, bestimmte Summe habe, oder nicht, bilde man aus den Gliedern derselben folgende identische Gleichung, in welcher eine beliebige Function des Stellenzeigers k, $\overset{k}{m}$, und eine beliebige Constante a (welche k nicht enthält) vorkommen:

$$2. \quad \overset{k+1}{A}+\overset{k+2}{A}+\ldots.+\overset{k+n}{A}=\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{a}-(\overset{k}{\omega}+\overset{k+1}{\omega}+\ldots.+\overset{k+n-1}{\omega})-\frac{\overset{k+n}{m}\overset{k+n}{A}}{a},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$3. \quad \overset{k}{\omega}=\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{a}-\left(\frac{\overset{k+1}{m}}{a}+1\right)\overset{k+1}{A}.$$

Wird dieser Werth des ω in die Gleichung (2.) gesetzt, so zeigt sich sogleich, dafs dieselbe vollkommen identisch, also allgemein

gültig ist. Es soll nun $\overset{k}{m}$ eine solche Function von k sein, dafs $\overset{k}{m}\overset{1}{A}$, von einem gewissen Werthe des k an, positiv sei, und wenn k in's Unendliche wächst, sich der Gränze 0 in's Unendliche nähere; ferner soll a eine positive Constante sein. Wenn nun die Gröfsen $\overset{k}{\omega}$, $\overset{k+1}{\omega}$, $\overset{k+2}{\omega}$, etc. alle positiv, oder auch gleich 0 sind, so ersieht man aus der Gleichung (2.) unmittelbar, dafs, so grofs auch die Zahl n angenommen werden mag, die Summe der Reihe $\overset{k+1}{A}+\overset{k+2}{A}+\overset{k+3}{A}+\ldots.+\overset{k+n}{A}$ stets kleiner sein mufs, als $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{a}$, und dafs also, wenn $\overset{k}{\omega}\geqq 0$ und $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{a}$ nicht unendlich grofs, das heifst a nicht gleich 0 ist, die Reihe $\overset{k+1}{A}+\overset{k+2}{A}+\overset{k+3}{A}+\ldots.$ in inf. nothwendig convergirt. Die Bedingung $\overset{k}{\omega}\geqq 0$ giebt, nach der Gleichung (3.):

$$\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{a}-\left(\frac{\overset{k+1}{m}}{a}+1\right)\overset{k+1}{A}\geqq 0,$$

oder

$$4.\qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}-\overset{k+1}{m}\leqq a.$$

Man setze nun, im Allgemeinen:

$$5.\qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}-\overset{k+1}{m}=f(k),$$

so findet sich folgender Lehrsatz für die Convergenz der Reihen:

I. Wenn $\overset{k}{A}$ das allgemeine Glied einer Reihe ist, in welcher, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden positiv sind, und man eine Function $\overset{k}{m}$, deren Werthe positiv sind, von der Art finden kann, dafs $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=0$ für $k=\infty$, und dafs die Quantität $f(k)=\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}-\overset{k+1}{m}$ gröfser als 0 ist, für $k=\infty$: so ist die Reihe convergent.

Dieser Satz reicht aber noch nicht hin, um zu bestimmen, ob eine Reihe convergire oder divergire; denn, fände man keine Function $\overset{k}{m}$, wie der Satz solche verlangt, so wüfste man gleichwohl nicht, ob die Reihe divergire oder dennoch convergire. Deshalb soll nun noch eine Bedin-

gung aufgesucht werden, unter welcher die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, gewifs divergirt.

Die Gleichung (5.) giebt:

$$6. \qquad \overset{k}{m}\overset{k}{A} - \overset{k+1}{m}\overset{k+1}{A} = \overset{k+1}{A} f(k).$$

Wird in dieser Gleichung statt k gesetzt: $k+1$, $k+2$, $k+3$, etc. in inf., so erhält man, weil $\overset{k}{m}\overset{k}{A} = 0$, für $k = \infty$, durch Addition aller dieser Gleichungen:

$$7. \qquad \overset{k}{m}\overset{k}{A} = \overset{k+1}{A}.f(k) + \overset{k+2}{A}.f(k+1) + \overset{k+3}{A}.f(k+2) + \ldots \text{ in inf.},$$

oder, wenn durch $f(k)$ dividirt wird:

$$8. \qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} = \overset{k+1}{A} + \frac{\overset{k+2}{A} f(k+1)}{f(k)} + \frac{\overset{k+3}{A} f(k+2)}{f(k)} + \ldots \text{ in inf.}$$

Wenn nun $f(k)$ sich immer mehr der 0 nähert, je gröfser k wird, so sind alle Coëfficienten der einzelnen Glieder in der Reihe (8.) kleiner als die Einheit, und folglich ist:

$$9. \qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} < \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \ldots \text{ in inf.}$$

Für $k = \infty$ mufs aber die Reihe rechts gleich 0 werden, wenn sie überhaupt convergiren soll: also mufs, um so mehr, die Quantität $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}$, für $k = \infty$, gleich Null werden, wenn die Reihe convergiren soll. Dies giebt, wenn im Allgemeinen gesetzt wird:

$$10. \qquad \varphi(k) = \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}$$

folgenden zweiten Lehrsatz über die Divergenz der unendlichen Reihen:

II. Wenn $\overset{k}{m}$ eine solche Function von k ist, dafs $\overset{k}{m}\overset{k}{A} = o$, für $k = \infty$, und dafs die Quantität $fk) = \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} - \overset{k+1}{m}$, für $k = \infty$, ebenfalls gleich 0 wird, die Quantität $\varphi(k) = \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}$ aber, für $k = \infty$, nicht gleich 0 wird, so divergirt die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist.

Es soll nun gezeigt werden, dafs diese beiden Sätze zur Bestimmung der Convergenz oder Divergenz einer jeden Reihe vollständig hinreichen; oder es soll gezeigt werden, dafs die Function $\overset{k}{m}$ immer so ge-

wählt werden kann, dafs eine der Quantitäten $f(k)$ oder $\varphi(k)$, für $k=\infty$, nicht gleich 0 wird. Wird sodann $f(k)>0$ und $\varphi(k)=0$, für $k=\infty$, so convergirt die Reihe, nach dem ersten Satze; wird aber $f(k)=0$ und $\varphi(k)>0$, so divergirt sie, nach dem zweiten Satze. Dafs aber eine der Quantitäten $f(k)$ oder $\varphi(k)$, für $k=\infty$, verschwinden mufs, folgt daraus, dafs, nach Gleichung (10.), $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=f(k).\varphi(k)$ und $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=0$, für $k=\infty$.

Wenn die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, convergirt, so nehme man für $\overset{k}{m}$ die Function, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\overset{k+1}{A}+\overset{k+2}{A}+\overset{k+3}{A}+\ldots. \text{ in inf.}$$

welche Function $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ sich immer mehr der Grenze 0 nähert, je gröfser k wird. Es wird bei dieser Annahme

$$f(k)=1 \text{ und } \varphi(k)=0, \quad \text{für } k=\infty.$$

Wenn aber die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, divergirt, so nehme man für $\overset{k}{m}$ eine Function, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\frac{1}{\overset{1}{A}+\overset{2}{A}+\overset{3}{A}+\ldots.+\overset{k}{A}},$$

wo die Function $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ sich ebenfalls, wie es verlangt wird, wenn k in's Unendliche wächst, der Grenze 0 nähert. Diese Annahme giebt

$$f(k)=0 \text{ und } \varphi(k)=\infty, \quad \text{für } k=\infty.$$

Dies reicht nun gerade hin, um zu zeigen, dafs es in jedem Falle eine reale Function $\overset{k}{m}$ giebt, welche der verlangten Bedingung genügt. Wenn man aber allemal die hier angegebene Function wählen müfste, so müfste man auch schon in voraus wissen, ob die Reihe convergire oder divergire, und man müfste, im ersten Falle, die Summe aller Glieder, welche auf ein bestimmtes Glied folgen, und, im zweiten Falle, die Summe aller Glieder, bis zu einem bestimmten Gliede, angeben können. Um diesen Übelstand zu vermeiden, bemerke ich: wenn man für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ eine Function $\overset{k}{r}$ gefunden hat, welche von der Art ist, dafs $f(k)$ und $\varphi(k)$, für $k=\infty$, nicht beide verschwinden, dafs dann dieselbe Bedingung auch erfüllt wird, wenn für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ irgend eine andere Function von k gewählt wird, welche sich, wenn k wächst, langsamer der 0 nähert, als $\overset{k}{r}$. Eine solche Function wird

$\overset{k}{r}\overset{k}{r}$ sein, wo $\overset{k}{s}$ eine Function ist, welche zugleich mit k wächst, sei es bis ins Unendliche, oder bis zu einer bestimmten Grenze, und wo ebenfalls $\overset{k}{r}\overset{k}{s}=0$ für $k=\infty$ ist. In der That: wenn, erstens für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\overset{k}{r}$, die Function $f(k)$ nicht verschwindet, für $k=\infty$, so wird dieselbe für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\overset{k}{r}\overset{k}{s}$ noch viel weniger verschwinden, weil von den beiden Ausdrücken des $f(k)$, nemlich:

$$\frac{\overset{k}{r}\overset{k}{s}-\overset{k+1}{r}\overset{k+1}{s}}{\overset{k+1}{A}} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{k}{r}-\overset{k+1}{r}}{\overset{k+1}{A}},$$

der erste gewifs gröfser ist, als der zweite. Wenn aber, zweitens, für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\overset{k}{r}$, die Function $\varphi(k)$ nicht verschwindet, wenn k ins Unendliche wächst, so wird dieselbe für $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\overset{k}{r}\overset{k}{s}$ noch weniger verschwinden, weil von den Ausdrücken des $\varphi(k)$ durch $\overset{k}{r}\overset{k}{s}$ und $\overset{k}{r}$, welche in folgende Form gebracht werden können:

$$\frac{\overset{k+1}{A}}{1-\frac{\overset{k+1}{r}\overset{k+1}{s}}{\overset{k}{r}\overset{k}{s}}} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{k+1}{A}}{1-\frac{\overset{k+1}{r}}{\overset{k}{r}}}$$

der erste gewifs gröfser ist, als der zweite, da $\overset{k+1}{s}>\overset{k}{s}$ und $\frac{\overset{k+3}{s}}{\overset{k}{s}}>1$.

Hieraus sieht man also, dafs die Function $\overset{k}{m}$, wenn sie auch durch die Bestimmungen des ersten und zweiten Lehrsatzes begrenzt wird, doch innerhalb dieser Grenzen willkürlich bleibt, oder, dafs es in jedem Falle nicht nur eine, sondern unendlich viele, von einander verschiedene Functionen giebt, welche die Bedingungen erfüllen, dafs $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=0$, für $k=\infty$, und dafs eine der Quantitäten $f(k)$ oder $\varphi(k)$, für $k=\infty$, nicht verschwindet. Die beiden aufgestellten Lehrsätze reichen vollständig hin, um für eine jede Reihe zu bestimmen, ob sie convergire oder divergire.

Als Beispiel soll folgende Reihe untersucht werden:

$$\frac{1}{2l2}+\frac{1}{3l3}+\frac{1}{4l4}+\ldots.+\frac{1}{klk}+\ldots.$$

Man nehme $\overset{k}{m}=k$, also $\overset{k}{m}\overset{k}{A}=\frac{1}{lk}$, so ist:

$$f(k)=(k+1)l(k+1)\left(\frac{1}{lk}-\frac{1}{l(k+1)}\right),$$

oder

$$f(k) = \frac{(k+1)l\left(1+\frac{1}{k}\right)}{lk},$$

Es ist, wie man hieraus leicht sieht, $f(k)=0$ für $k=\infty$, also $\varphi(k)$ zu untersuchen. Dies wird:

$$\varphi(k) = \frac{1}{(k+1)l\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Es ist also, für $k=\infty$, $\varphi(k)=1$, also die Reihe divergent. Conf. gegenwärtiges Journal Bd. 3. pag. 79.

Es giebt eine Function $\overset{k}{m}$, welche zur Bestimmung der Convergenz oder Divergenz einer aufserordentlich umfassenden Gattung von Reihen hinreicht. Dies ist die Gröfse k selbst. Wird nemlich $\overset{k}{m}=k$ angenommen, so werden die beiden Quantitäten $f(k)$ und $\varphi(k)$:

$$11. \quad f(k) = \frac{k\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} - k - 1 = \frac{k\overset{k}{A} - (k+1)\overset{k+1}{A}}{\overset{k+1}{A}},$$

$$12. \quad \varphi(k) = \frac{k\overset{k}{A}}{f(k)} = \frac{k\overset{k}{A}\,\overset{k+1}{A}}{k\overset{k}{A} - (k+1)\overset{k+1}{A}}.$$

Wenn die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, von der Art wäre, dafs $f(k)$ negativ würde, für sehr grofse Werthe des k, so würde die Reihe nothwendig divergiren, weil dann $k\overset{k}{A} < (k+1)\overset{k+1}{A}$, und folglich $k\overset{k}{A}$, für $k=\infty$, nicht gleich 0 ist, welches, wie bekannt ist, und wie sich leicht zeigen läfst, bei jeder convergirenden Reihe der Fall sein mufs. Wenn aber (fk), für $k=\infty$, einen positiven Werth hat, welcher gröfser als 0 ist, so convergirt die Reihe, nach dem ersten Lehrsatze. Es ist also nur noch der Fall zu untersuchen, wenn $f(k)=0$, für $k=\infty$. Ich nehme nun an: die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, solle von der Art sein, dafs der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich nach fallenden Potenzen des Stellenzeigers k entwickeln läfst: so wird, wie aus der Gleichung (11.) leicht zu ersehen ist, auch $f(k)$ sich in eine Reihe von folgender Form entwickeln lassen:

$$13. \quad f(k) = \frac{a}{k^\alpha} + \frac{b}{k^\beta} + \frac{e}{k^\gamma} + \ldots .^*),$$

*) Es mufs hier eigentlich noch hinzu gesetzt werden, dafs sich der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder, oder die Gröfse $f(k)$, für grofse Werthe des k

wo $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$, etc., und wo α, weil $f(k) = 0$, für $k = \infty$, positiv sein mufs. Hieraus findet man für $\frac{f(k+1)}{f(k)}$ folgende Entwickelung:

$$14. \quad \frac{f(k+1)}{f(k)} = 1 - \frac{\alpha}{k} + \ldots,$$

wo alle folgenden Glieder höhere Potenzen von $\frac{1}{k}$ zu Factoren haben. Aus den Gleichungen (11.) und (12.) folgt nun:

$$15. \quad \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)} = \frac{f(k+1)}{f(k)} + \frac{f(k+1)}{k+1}.$$

Wenn man hierin statt $\frac{f(k+1)}{f(k)}$ und $f(k+1)$ ihre Entwicklungen setzt, und alle höheren Potenzen von $\frac{1}{k}$ vernachlässigt, so folgt:

$$16. \quad \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)} = 1 - \frac{\alpha}{k} + \ldots,$$

woraus, weil α positiv ist, hervorgeht, dafs der Quotient $\frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)}$, wenigstens von einem Werthe des k an, für alle folgenden, kleiner als Eins ist: dafs also $\Phi(k+1) > \Phi(k)$, und also $\Phi(k)$ eine Function ist, welche zugleich mit k wächst. Deshalb ist $\Phi(k)$, für $k = \infty$, nicht gleich 0, und folglich divergirt die Reihe in diesem Falle, nach dem zweiten Lehrsatze. Hieraus geht folgender Satz hervor, welcher zur Bestimmung der Divergenz oder Convergenz einer sehr ausgebreiteten Gattung von Reihen hinreicht.

III. Eine Reihe $\overset{1}{A} + \overset{2}{A} + \overset{3}{A} + \ldots$ in inf., in welcher, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden dasselbe Vorzeichen haben, und welche die Eigenschaft hat, dafs der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder $\frac{\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}$ sich nach fallenden Potenzen von k entwickeln läfst, ist convergent, wenn $f(k) = \frac{k\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} - k - 1$ einen positiven Werth bekommt, welcher, selbst für $k = \infty$, nicht verschwindet; wird aber $f(k)$, für $k = \infty$, entweder gleich 0, oder gar negativ, so ist die Reihe divergent.

---

convergent, nach fallenden Potenzen von k entwickeln lassen müsse. Da aber die Reihe (13.), für grofse Werthe des k, wenigstens allemal semiconvergent ist, und da die semiconvergenten Reihen, wie bekannt, wenn auch wohl noch nirgends streng bewiesen, die richtigen Werthe der Functionen näherungsweise geben, so habe ich diese Bedingung nicht erst hinzugesetzt.

Als Anwendung dieses Satzes mag die Convergenz oder Divergenz folgender Reihe untersucht werden, deren Glieder, wie man leicht sieht, von einem bestimmten an, alle positiv werden müssen:

$$1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta.(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\ldots,$$

wo

$$\frac{\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}=\frac{(k+\gamma)(k+1)}{(k+\alpha)(k+\beta)},$$

welcher Ausdruck sich nach fallenden Potenzen von k entwickeln läfst, wie der Satz III. es verlangt. Es ist nun

$$f(k)=\frac{k(k+\gamma)(k+1)}{(k+\alpha)(k+\beta)}-k-1,$$

oder

$$f(k)=\frac{(\gamma-\alpha-\beta)k^2+(\gamma-\alpha-\beta-\alpha\beta)k-\alpha\beta}{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta}.$$

Wenn nun $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist, und gröfser als 0, so ist auch $f(k)$, für $k=\infty$, positiv, und gröfser als 0; also in diesem Falle convergirt die Reihe. Wenn aber $\gamma-\alpha-\beta=0$, so wird auch $f(k)=0$, für $k=\infty$; oder, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ negativ ist, so wird auch $f(k)$ negativ, für $k=\infty$; in diesen beiden Fällen also divergirt die Reihe. Conf. die Abhandlung von Gaufs über diese Reihe, in den *Comment. soc. Gotting. Tom. II. pag.* 23.

Es bietet sich hier die Gelegenheit dar, zu bestimmen, unter welchen Bedingungen das Criterium der Convergenz und Divergenz gültig ist, welches Olivier in diesem Journale Bd. II. pag. 34. etc. aufgestellt hat, und welches, wie schon Abel gezeigt hat (Bd. III. pag. 79.), nicht allemal richtige Resultate giebt. Es kann dieses Criterium, wie Olivier es aufstellt, so ausgesprochen werden: eine Reihe, deren allgemeines Glied A ist, und in welcher, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden dasselbe Vorzeichen behalten, convergirt, wenn $k\overset{k}{A}=0$, für $k=\infty$, und divergirt in jedem andern Falle. Es soll jetzt gezeigt werden, dafs dieses Criterium ebenfalls für die jetzt genannten Reihen richtig ist, bei welchen der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich nach fallenden Potenzen des Stellenzeigers entwickeln läfst.

Es sei also wieder die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$, ist, von der genannten Art; so hat man ebenfalls

17. $$f(k)=\frac{a}{k^\alpha}+\frac{b}{k^\beta}+\frac{c}{k^\gamma}+\ldots,$$

wo $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$, etc. Ferner folgt aus den Gleichungen (11.) und (12.):

$$18. \qquad \frac{k\overset{k}{A}}{(k+1)\overset{k+1}{A}} = 1 + \frac{f(k)}{k+1} \ldots.$$

und wenn man in dieser Gleichung nach einander statt k setzt: $k+1$, $k+2$, ... $k+n-1$, und die so entstandenen Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$19. \qquad \frac{k\overset{k}{A}}{(k+n)\overset{k+n}{A}} = \left(1+\frac{f(k)}{k+1}\right)\left(1+\frac{f(k+1)}{k+2}\right)\ldots.\left(1+\frac{f(k+n-1)}{k+n}\right),$$

oder, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$20. \qquad l(k\overset{k}{A}) - l((k+n)\overset{k+n}{A})$$
$$= l\left(1+\frac{f(k)}{k+1}\right) + l\left(1+\frac{f(k+1)}{k+2}\right) + \ldots. + l\left(1+\frac{f(k+n-1)}{k+n}\right).$$

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen diese Reihe der Logarithmen convergire, wenn n unendlich grofs wird. Sie ist von der Art, dafs alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben, und dafs der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich nach fallenden Potenzen von k entwickeln läfst, wenn für $f(k)$ sein Werth aus der Gleichung (17.) gesetzt wird. Man findet nemlich:

$$21. \qquad \frac{l\left(1+\frac{f(k)}{k+1}\right)}{l\left(1+\frac{f(k+1)}{k+2}\right)} = 1 + \frac{1+\alpha}{k} + \ldots.,$$

wo alle folgenden Glieder der Entwicklung höhere Potenzen von $\frac{1}{k}$ zu Factoren haben. Das Criterium des Satzes III. giebt also:

$$22. \qquad \frac{k\,.\,l\left(1+\frac{f(k)}{k+1}\right)}{l\left(1+\frac{f(k+1)}{k+2}\right)} - k - 1 = \alpha \quad (\text{für } k=\infty).$$

Die Reihe der Logarithmen convergirt also, wenn α positiv und gröfser als 0 ist, und divergirt, wenn α negativ, oder gleich 0 ist. Wenn nun $k\overset{k}{A} = 0$, für $k=\infty$, so ist auch $-l((k+n)\overset{k+n}{A}) = \infty$, für $n=\infty$; also mufs, nach Gleichung (20.), die Reihe der Logarithmen divergiren, wenn $k\overset{k}{A} = 0$, für $k=\infty$; wenn aber die Reihe der Logarithmen divergirt, so ist α negativ, oder gleich 0; wenn α aber negativ oder gleich 0 ist, so ist, nach Gleichung (17.), $f(k)$ positiv und gröfser als 0, für $k=\infty$; dann

ist aber, nach dem III. Satze, $\overset{k}{A}$ das allgemeine Glied einer convergirenden Reihe. Also: wenn $k\overset{k}{A} = 0$, für $k = \infty$, so convergirt die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, nemlich unter den gemachten Voraussetzungen. Dieses Criterium, welches bei einigen Reihen eine sehr leichte Anwendung findet, läfst sich nun folgendermafsen darstellen:

IV. Eine Reihe $\overset{1}{A} + \overset{2}{A} + \overset{3}{A} + \ldots$. in inf., in welcher, von einem bebestimmten Gliede an, alle folgenden dasselbe Vorzeichen haben, und welche von der Art ist, dafs der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich nach fallenden Potenzen des Stellenzeigers entwickeln läfst, ist convergent; wenn $k\overset{k}{A} = 0$, für $k = \infty$; und wenn $k\overset{k}{A}$ nicht $= 0$, für $k = \infty$, so ist die Reihe divergent.

Beispiele, auf welche dieses Criterium angewendet ist, sehe man in der angeführten Abhandlung von Olivier; denn alle Reihen, auf welche Olivier sein Criterium daselbst angewendet hat, sind von der Art, wie sie der dritte und vierte Satz verlangen; und es kommen auch in der Analysis nur selten Reihen vor, bei denen der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich nicht nach fallenden Potenzen des Stellenzeigers entwickeln liefse.

Zur Erleichterung der Untersuchung, ob eine Reihe convergire oder divergire, kann manchmal folgender Satz dienen:

V. Wenn $\overset{k}{r}$ eine Function von k ist, welche, wenn k ins Unendliche wächst, sich einer endlichen Grenze nähert, so werden die beiden Reihen

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{A} + \overset{3}{A} + \overset{4}{A} + \ldots. \text{ in inf.}$$

und

$$r\overset{1}{A} + r\overset{2}{A} + r\overset{3}{A} + r\overset{4}{A} + \ldots. \text{ in inf.,}$$

wie die eine, so die andere, convergiren oder divergiren.

Da es bei der Untersuchung der Convergenz nie auf eine endliche Anzahl der ersten Glieder ankommt, so setze ich zum Beweise dieses Satzes:

$$S = \overset{k}{A} + \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \ldots.$$

$$S' = r\overset{k}{A} + r\overset{k+1}{A} + r\overset{k+2}{A} + \ldots.$$

Ich bezeichne nun den gröfsten Werth, welchen r in dieser zweiten Reihe hat, durch p, den kleinsten durch q: so ist offenbar

$$S' > qS \quad \text{und} \quad S' < pS.$$

Ist nun S divergent, oder unendlich grofs, so ist auch qS unendlich, und folglich auch S'; hat aber S einen endlichen Werth, so ist auch pS endlich, und also auch S'; was zu beweisen war.

Die willkürliche Function $\overset{k}{m}$, welche in den Criterien des ersten und zweiten Satzes enthalten ist, giebt auch ein leichtes Mittel an die Hand, um zu finden, wie schnell oder wie langsam eine Reihe convergire: oder, zwei Grenzen zu finden, zwischen welchen die Summe der auf ein bestimmtes Glied folgenden Glieder einer convergirenden Reihe sich befinden mufs. Es sollen, von dem k^{ten} Gliede an, alle folgenden einerlei Vorzeichen haben, und man setze, der Kürze wegen,

$$23. \qquad \overset{k}{\lambda} = \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \ldots \text{ in inf.}$$

Wenn nun die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, wirklich convergirt, so wird die willkürliche Function $\overset{k}{m}$ immer so angenommen werden können; dafs die Quantität $f(k)$ (Gleichung (5.)), für $k = \infty$, einen endlichen positiven Werth erhält. Es ist, nach Gleichung (7.):

$$24. \qquad \overset{k}{m}\overset{k}{A} = \overset{k+1}{A} f(k) + \overset{k+2}{A} f(k+1) + \overset{k+3}{A} f(k+2) + \ldots.$$

Wenn nun, für jede ganze positive Zahl n, $f(k+n) > f(k+n+1)$ ist, oder wenn $f(k)$, von dem bestimmten Werthe des k an, fortwährend abnimmt, so wie k gröfser wird, so ist

$$25. \qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} < \overset{k}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(\infty)} > \overset{k}{\lambda}.$$

Wenn aber die Function $f(k)$, von dem bestimmten Werthe des k an, zugleich mit k wächst, oder wenn, für jedes ganze positive n, $f(k+n) < f(k+n+1)$ ist, so ist

$$26. \qquad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} > \overset{k}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f\infty} < \overset{k}{\lambda}.$$

Der wesentliche Nutzen dieser Formeln wird an einigen Beispielen klar werden.

Beispiel 1. Es sei gegeben die Reihe:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

und es soll gefunden werden, wie viel höchstens, und wie viel wenigstens der Fehler beträgt, welchen man begeht, wenn man alle Glieder dieser Reihe, die auf das k^{te} Glied folgen, vernachlässigt.

Man nehme $\overset{k}{m} = \frac{1}{k}$, so findet man $f(k) = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$; also ist, weil im allgemeinen $f(k+n) > f(k+n+1)$, nach den Formeln (25.):

$$\overset{k}{\lambda} > \frac{1}{(1.2.3....k).k.\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)} \text{ und } \overset{k}{\lambda} < \frac{1}{(1.2.3....k)\,k}.$$

Wird $k = 10$ gesetzt, so findet man, durch leichte Rechnung:

$$\overset{10}{\lambda} > 0{,}000000027309 \text{ und } \overset{10}{\lambda} < 0{,}000000027557;$$

also

$$\overset{10}{\lambda} = 0{,}000000027 \ldots.$$

Nimmt man also die ersten zehn Glieder der Reihe, so rechnet man auf 7 Stellen nach dem Comma genau; wenn man aber das hier berechnete $\overset{10}{\lambda}$ als Correction hinzuthut, so erhält man 9 Stellen genau.

Beispiel 2. Eine Reihe, welche ungemein schwach convergirt, ist folgende:

$$\frac{1}{2(l2)^2} + \frac{1}{3(l3)^2} + \frac{1}{4(l4)^2} + \frac{1}{5(l5)^2} + \ldots. \text{ etc.}$$

Hier ist $\overset{k}{A} = \frac{1}{k(lk)^2}$, und wenn $\overset{k}{m} = klk$ genommen wird:

$$f(k) = \frac{kl\left(1+\frac{1}{k}\right)lk}{l(k+1)}, \text{ und } f(\infty) = 1,$$

und weil $f(k+n) + < f(k+n+1)$, nach den Formeln (26.):

$$\overset{k}{\lambda} < \frac{l(k+1)}{k(lk)^2 l\left(1+\frac{1}{k}\right)} \text{ und } \overset{k}{\lambda} > \frac{1}{lk}.$$

Da der Fehler gewifs gröfser als $\frac{1}{lk}$ ist, so mufs, wenn die Briggischen Logarithmen angenommen werden, um den Werth dieser Reihe nur auf 6 Stellen nach dem Comma genau zu berechnen, wenigstens eine Anzahl Glieder genommen werden, welche eine Million Stellen hat, oder aus einer Million Ziffern besteht.

Die Criterien der Convergenz und Divergenz der Reihen können leicht auf die Untersuchung der endlichen oder nicht endlichen Werthe angewendet werden, welche die Producte von unendlich vielen Factoren haben; für diese soll folgender einfache Lehrsatz bewiesen werden:

VI. Ein Product von unendlich vielen Factoren:

$$P = (1+\overset{1}{a})(1+\overset{2}{a})(1+\overset{3}{a})(1+\overset{4}{a})+\ldots.$$

in welchem die Gröfse $\overset{k}{a}$, von einem bestimmten Werthe des k an, für alle folgenden dasselbe Vorzeichen behält, hat einen endlichen Werth, wenn $\overset{k}{a}$ das allgemeine Glied einer convergirenden Reihe ist; im entgegengesetzten Falle ist es entweder unendlich, oder gleich 0, je nachdem die Gröfsen $\overset{k}{a}$ alle positiv oder negativ werden.

Es ist, wenn die Logarithmen genommen werden:

$$27. \qquad lP = l(1+\overset{1}{a})+l(1+\overset{2}{a})+l(1+\overset{3}{a})+\ldots.$$

in welcher Reihe, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden einerlei Vorzeichen haben. Diese Reihe kann auch folgendermafsen geschrieben werden:

$$28. \qquad lP = \overset{1}{a}.\frac{l(1+\overset{1}{a})}{\overset{1}{a}}+\overset{2}{a}.\frac{l(1+\overset{2}{a})}{\overset{2}{a}}+\overset{3}{a}.\frac{l(1+\overset{3}{a})}{\overset{3}{a}}+\ldots.$$

Wenn das Product P einen endlichen Werth haben soll, so ist klar, dafs die Gröfse $\overset{k}{a}$ sich immer mehr der 0 nähern mufs, je gröfser k wird; dann nähert sich aber auch $\frac{l(1+\overset{k}{a})}{\overset{k}{a}}$ immer mehr der Grenze 1.; also wird, nach dem fünften Lehrsatze, die Reihe (28.) denselben Bedingungen der Convergenz und Divergenz unterliegen, als die Reihe $\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\ldots.$ in inf. Je nachdem also diese Reihe convergirt oder divergirt, wird lP einen endlichen oder unendlichen Werth haben. Wenn ferner die Gröfsen $\overset{k}{a}$, $\overset{k+1}{a}$, etc. alle positiv werden, und divergiren, so wird $lP=+\infty$, also $P=\infty$; werden diese Gröfsen aber negativ, und divergiren, so ist $lP=-\infty$, also $P=0$; wodurch die Richtigkeit des aufgestellten Satzes bewiesen ist.

Um auch von diesem Satze eine Anwendung zu geben, soll folgendes unendliche Product untersucht werden, welches die Function $\Gamma(z)$, nach Legendre, darstellt, nemlich:

$$\frac{1}{z(z+1)}\cdot\frac{2^{z+1}}{1^z(2+z)}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\cdot\frac{4^{z+1}}{3^z(4+z)}\cdot\ldots.$$

Hier ist

$$1+\overset{k}{a} = \frac{k^{z+1}}{(k-1)^z(k+z)}\cdot\ldots.;$$

also

$$\overset{k}{a} = \frac{k^{z+1} - (k-1)^z(k+z)}{(k-1)^z(k+z)}.$$

Dafs dieses $\overset{k}{a}$, für jeden beliebigen Werth des z, das allgemeine Glied einer convergirenden Reihe ist, kann durch den dritten oder vierten Lehrsatz leicht bewiesen werden, so, dafs auch dieses Product einen endlichen Werth haben mufs, welcher weder 0 noch unendlich wird, wenn nemlich (wie es hier wirklich für negative, ganzzahlige Werthe des z der Fall ist) keiner der Factoren unendlich wird, oder verschwindet.

Auch für die unendlichen Producte kann man nach einer, der, oben für die Reihen angewandten, ähnlichen Methode die Grenzen des Fehlers bestimmen, welchen man begeht, wenn man alle Factoren, die auf einen bestimmten Factor folgen, vernachlässigt. Da jedoch die unendlichen Producte selten zur wirklichen Berechnung der Werthe der Functionen angewendet werden, so übergehe ich dies, um diesen Aufsatz nicht zu weit auszudehnen.

Liegnitz, den 29. Januar 1833.

Man lese in diesem Hefte
S. 140 Z. 11 und 12 v. u. (0) statt [0],
S. 142 in den 4 untern Zeilen lese man statt der Worte des Textes, von dem Worte „Also" an: Also hat die Gleichung dann immer 1 reelle Wurzel, und zwar ist diese Wurzel negativ, wenn β positiv, und positiv, wenn β negativ ist.

10.

Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen *).

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Kiel.)

1.

Bereits seit längerer Zeit hat die kleinste von gegebenen Linien begrenzte Fläche die Aufmerksamkeit der Mathematiker in einem hohen Grade, sowohl wegen ihrer eigenthümlichen Eigenschaften, als wegen der Schwierigkeiten erregt, welche sich einer genaueren Untersuchung, und einer durch continuirliche Bewegung entstandenen Construction derselben entgegensetzen. Nachdem Lagrange die Frage zuerst angeregt, und die Gleichung der Fläche, in Form einer partiellen Differentialgleichung vom zweiten Grade, gefunden hatte, zeigte Meusnier, dafs ihr auch noch eine andere merkwürdige Eigenschaft zukomme: der gröfste und der kleinste Krümmungshalbmesser sind nämlich in jedem ihrer Puncte gleich grofs, und entgegengesetzt. Auch fand Meusnier, zwar nicht das vollständige Integral der erwähnten Differentialgleichung, aber doch zwei partielle Fälle desselben: die Gleichungen zweier speciellen krummen Flächen nämlich, welche der allgemeinen Gleichung Genüge leisten; und zwar erstens, der Schraubenfläche, d. i. derjenigen Fläche, welche entsteht, wenn eine horizontale gerade Linie sich so bewegt, dafs sie stets durch eine verticale Gerade und durch eine Schraubenlinie geht, die sich um die Oberfläche eines geraden Cylinders hinaufwindet, als dessen Axe die genannte Verticale angesehen wird; und zweitens, derjenigen Fläche, welche durch Umdrehung der Kettenlinie um eine horizontale, sie nicht schneidende, Axe erzeugt wird **). Das allgemeine Integral der Gleichung unserer Fläche fanden zuerst Monge und Legendre, aber in einer so verwickelten Form, dafs

*) Diese Abhandlung ist im September 1833 der Königl. Akad. der Wissensch. zu Copenhagen vorgelegt worden.

**) Über diese specielle Fläche ist eine interessante Untersuchung angestellt worden von Goldschmidt: *Determinatio superficiei minimae, rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae. Goettingae.* 1831.

man bis jetzt von dem Integrale fast noch keinen Gebrauch gemacht hat. So urtheilt auch Poisson, bei Gelegenheit der Ankündigung einer neuen von ihm angestellten Untersuchung über diesen Gegenstand: einer Untersuchung übrigens, der man mit der gespanntesten Erwartung entgegen sehen mufs: „*Malheureusement on ne sauroit tirer aucune partie de cette intégrale, qui se trouve compliquée de quantités imaginaires, et exprimée par le système de trois équations entre deux variables auxiliaires et les coordonnées courantes de la surface.*" (S. gegenw. Journal, VIII. Bd. pag. 361.). Eine neue, specielle Fläche hat Monge nicht angegeben; und da die Untersuchung über die characteristischen Linien der Fläche ihn darauf führte, dafs dieselben in einem Puncte beständen, (ein Umstand, der darauf hinzudeuten scheint, dafs nicht alle Flächen als Einhüllungsflächen betrachtet werden können): so gelang es ihm auch nicht, die Fläche durch eine continuirliche Bewegung zu erzeugen. Diese Umstände veranlafsten die Fürstl. Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, eine neue Untersuchung der Fläche zum Gegenstande einer Preisaufgabe für das Jahr 1831 zu machen. Der Preis ist einer von mir im November 1830 eingereichten Abhandlung zuerkannt worden, die in den *Actis Societ. Jablonovianae Vol. IV. Fasc. II. pag.* 204 — 280. (*De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione:*

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t = 0$$

disquisitiones analyticae) enthalten ist, und von welcher ich jetzt einige Resultate anführen mufs, da ich mich in der gegenwärtigen Abhandlung häufiger auf dieselbe zu beziehen gezwungen bin.

Sind nämlich x, y, z die veränderlichen Coordinaten der Fläche und man setzt die partiellen Differentialquotienten, wie gewöhnlich:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p, \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right) = q;$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r, \qquad \left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right) = s, \qquad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t;$$

so findet man, als Differentialgleichung der Fläche:

$$1. \qquad h = (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t = 0.$$

Dem Integrale derselben hat Legendre die Form

$$2. \qquad \begin{cases} x = \varphi' a+\psi' b, \\ y = \varphi a-a\varphi' a+\psi b-b\psi' b, \\ z = \int\sqrt{(-1-a^2)}\varphi'' a\,da-\int\sqrt{(-1-b^2)}\psi'' b\,db, \end{cases}$$

oder, da die Integrale aus dieser Gleichung ganz entfernt werden können, die Form

$$3.\quad \begin{cases} x = A^3\varphi''a - 3Aa\varphi'a + B^3\psi''b - 3Bb\psi'b, \\ y = -A^3a\varphi''a + (2a^2-1)A\varphi'a - B^3b\psi''b + (2b^2-1)B\psi'b, \\ z = A^4\varphi''a - 2A^2a\varphi'a + \varphi a - B^4\psi''b + 2B^2b\psi'b - \psi b, \end{cases}$$

gegeben, wo a, b zwei beliebige Gröfsen vorstellen, die aus dem Systeme der Gleichungen (2.) oder (3.) eliminirt werden müssen; wo ferner durch φa, ψb; $\varphi'a$, $\psi'b$; $\varphi''a$, $\psi''b$ zwei willkürliche Functionen, resp. von a und von b, nebst ihren beiden ersten Differentialquotienten bezeichnet sind, und Kürze halber $\sqrt{(-1-a^2)} = A$, $\sqrt{(-1-b^2)} = B$ gesetzt ist. Durch leichte Substitutionen erhält man aus den Gleichungen (2.) die Form, deren sich Monge bedient hat:

$$4.\quad \begin{cases} x = a + b, \\ y = \varphi a + \psi b, \\ z = \int\sqrt{(-1-(\varphi'a)^2)}\,da + \int\sqrt{(-1-(\psi'b)^2}\,db). \end{cases}$$

Da es mir nun eben so wenig, als den frühern Bearbeitern dieser Aufgabe, gelungen war, eine allgemeine Construction der Fläche anzugeben, so ging ich darauf aus, möglichst viele particuläre Fälle des Integrals, durch eine sich überall gleich bleibende Methode, aus der Differentialgleichung (1.) zu entdecken. Um dahin zu gelangen, wurde sie auf verschiedene Weise in zwei Gleichungen von der Art zerfällt, dafs die eine von ihnen eine leichte Integration gestattete, und die willkürlichen Functionen, die in dem Integrale derselben vorkamen, wurden dann so bestimmt, dafs auch der andern Gleichung Genüge geleistet wurde. Auf diese Weise ergab sich, wenn

$$r \text{ oder } t \text{ oder } r + t = 0$$

gesetzt wurde, die Gleichung der Schraubenfläche:

$$5.\quad Z = y \operatorname{tang} Dx,$$

wo D eine Constante bezeichnet; ferner wenn man

$$s = 0$$

annahm, die Fläche, deren Gleichung

$$6.\quad e^{Dz} = \frac{\cos Dy}{\cos Dx}$$

ist, aus welcher dann die allgemeinere

$$7.\quad e^{B\sin(\beta-\alpha)z} = A.\frac{\cos B(x\cos\alpha + y\sin\alpha + a)}{\cos B(x\cos\beta + y\sin\beta + b)}$$

hergeleitet wurde, wo A, B, a, b, α, β gleichfalls beliebige Constanten darstellen; ferner wenn

$$x = \varrho\cos\vartheta, \quad y = \varrho\sin\vartheta \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right) = 0$$

gesetzt wurde, die Umdrehungsfläche der Kettenlinie, deren Gleichung

$$8. \qquad \sqrt{(x^2+y^2)} = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{z-b}{a}} + e^{-\frac{z-b}{a}}\right)$$

ist, und welche Meusnier nicht durch diese Methode, sondern durch die Forderung, dafs die entstehende Fläche eine Umdrehungsfläche sein solle, erhalten hatte, und wenn man endlich

$$\left(\frac{d^2z}{d\varrho\,.\,d\vartheta}\right) = 0$$

annahm, eine Fläche, deren Gleichung

$$9. \quad Z = b\log\frac{\sqrt{(\varrho^2+a^2)}+\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}{a} - a\,\mathrm{arc}\left[\mathrm{tang} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{\varrho^2+a^2}{\varrho^2-b^2}\right)}\right] + a\vartheta + c$$

ist, und von welcher die Schraubenfläche und die Umdrehungsfläche der Kettenlinie specielle Fälle sind. Auch wurden für jede dieser Flächen die willkürlichen Functionen φa, ψb in dem Integrale (4.) bestimmt, und im Allgemeinen gezeigt, wie man jedesmal diese willkürlichen Functionen durch Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung vom ersten Grade, für welche die Bedingungen der Integrabilität erfüllt werden, bestimmen könne, wenn man auf irgend eine Weise, also z. B. durch die angewandte Zerfällungsmethode, eine endliche Gleichung erhalten hat, welche der Differentialgleichung $h = 0$ Genüge leistet.

Hieraus ersieht man, dafs bis jetzt das Integral unserer Gleichung zur Erfindung neuer Eigenschaften, oder neuer specieller Fälle, noch nicht benutzt worden ist. Als Grund hiervon kann man annehmen, dafs es zwar leicht ist, passende Functionen φa, φb, aufzufinden, welche in den Systemen (2.) oder (4.) eine Integration gestatten: dafs es aber bei weitem schwieriger und gröfstentheils unausführbar ist, diese Functionen so zu wählen, dafs man die Quantitäten a und b aus einem dieser Systeme eliminiren könne, und dafs das Resultat auch wirklich eine Fläche darstelle, und nicht etwa blofs eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Gröfsen sei. Da es mir jedoch, wie erwähnt, in der angeführten Abhandlung gelungen war, die willkürlichen Functionen zu den bekannten Gleichungen der Flächen (5.), (6.), (8.), (9.) zu finden, so mufste sich der Gedanke darbieten, die Untersuchung umzukehren, und,

von dem Integrale der Gleichung (1.) ausgehend, willkürliche Functionen φa, ψb aufzusuchen, welche eine Elimination von a und b gestatten, und zu Gleichungen von neuen Flächen führen.

Dies ist der Zweck, den ich mir im ersten Abschnitte dieser Untersuchung zu erreichen vorgesetzt habe. Es haben sich auf diesem Wege drei neue Flächen ergeben, deren eine überaus einfach und die Correspondirende der Fläche (6.) ist, indem sie zu jener in einer ähnlichen Beziehung steht, wie das Ellipsoid zu den Hyperboloiden. Der zweite Abschnitt dieser Abhandlung verfolgt zwar einen ganz andern Endzweck, hat jedoch mit dem ersten das gemein, dafs die Untersuchung sich gleichfalls auf dem Integrale der Gleichung (1.) stützt. Die bisher angestellten Untersuchungen hatten nämlich, auf den verschiedensten Wegen, z. B. durch die bereits angeführte Zerfällung der Gleichung (1) in die beiden

$$r + t = 0,$$

$$10. \qquad q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

oder indem man $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \delta$, und $\left(\frac{dz}{d\varrho}\right) = 0$ setzte, zu dem Resultate geführt, dafs die Schraubenfläche unter den kleinsten Flächen enthalten sei. Dabei war man also entweder von der Entstehungsart jener Fläche durch Bewegung einer immer horizontalen geraden Linie, deren allgemeine Gleichung bekanntlich (10.) ist, wenn man die feste Ebene, der die bewegte Linie immer parallel bleiben soll, zur Coordinatenebene der xy annimmt (vergl. Monge, *Applic. de l'analyse à la Géom. ed.* 1807. *pag.* 64.), oder von der Gleichung $h = 0$ ausgegangen; und als einen speciellen Fall ihres Integrals hatte man $z = y \operatorname{tang} Dx$ gefunden. Es fragte sich nun, ob aufser der genannten Fläche noch andere kleinste Flächen durch Bewegung einer geraden Linie entstehen könnten, möchte übrigens das Gesetz der Bewegung sein, welches es wollte, oder mindestens, wenn etwa der Elimination Schwierigkeiten in den Weg träten, ob sich für diesen Fall nicht die Form der willkürlichen Functionen vollständig bestimmen liefse. Bei dem ersten Anblicke scheint es zwar, als bedürfe es dieser Untersuchung gar nicht, und als könne man geradesweges behaupten, nur die Schraubenfläche könne durch Bewegung einer geraden Linie entstehen, und zugleich der Eigenschaft des Minimums der Area theilhaftig werden. Denn es seien zwei nicht in einer Ebene befindliche gerade Linien gegeben; nimmt man ihre kleinste Entfernung

als Axe eines geraden Cylinders an, um dessen Oberfläche eine Schraubenlinie sich hinaufwindet, und läfst durch dieselbe, und durch die Axe, eine die letztere stets unter rechtem Winkel schneidende gerade Linie sich hinaufbewegen, so ist das von der Schraubenlinie und den beiden gegebenen geraden Linien begrenzte Stück der Schraubenfläche, nach dem Vorigen, die kleinste, von den beiden gegebenen Linien begrenzte, Fläche. Liefse sich also durch dieselben noch eine andere, von der Schraubenfläche verschiedene, kleinste Fläche legen, so würde jene nicht die kleinste sein. Aber, abgesehen davon, dafs die Unmöglichkeit, dafs beide Flächen auch wohl gleichen Inhalt haben könnten, nicht von vorn herein einleuchtet: so ist offenbar bei der angegebenen Entstehungsart auch noch die Annahme gemacht, dafs nicht blofs die durch die gegebenen beiden Geraden begrenzte Fläche, sondern auch jedes Stück derselben, welches durch eine von ihnen und durch eine andere Gerade abgeschnitten wird, die der Ebene parallel ist, welche auf der kleinsten Entfernung der beiden gegebenen Geraden senkrecht steht, oder jedes Stück, welches durch zwei solche gerade Linien begrenzt wird, ein Kleinstes sein soll. Ob aber diese Forderung in der Natur der Sache liege, oder eine der gegenwärtigen Frage ganze fremde Bedingung in die Rechnung bringe, scheint mir nicht leichter, als auf dem angegebenen Wege untersucht werden zu können. Hat sich nun auch das verlangte geometrische Resultat, wegen der Unmöglichkeit der Elimination, nicht ergeben, so scheint mir doch das analytische Resultat, durch welches die Form der willkürlichen Functionen in diesem Falle vollständig bestimmt wird, nicht ganz unbemerkenswerth, da man aus demselben, in Verbindung mit einem andern, später anzuführenden Umstande, mit grofser Wahrscheinlichkeit schliefsen kann, dafs es allerdings keine andere Fläche als die Schraubenfläche gebe, die, in unserm Falle, durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen kann.

2.

Indem wir nun zur Untersuchung der Functionen, welche eine leichte Elimination gestatten, selbst, schreiten, wird man vor Allem daran denken können, den Functionen φa, ψb, in den Gleichungen (3.), algebraische Werthe beizulegen, da man alsdann, nach vollbrachter Elimination, eine algebraische Gleichung für die verlangte Fläche erhielte. Aber selbst die einfachsten Annahmen führen auf endlose Weitläufigkeiten. Setzt

man nemlich die eine derselben ψb gleich einer Constante, so nehmen die Gleichungen (3.) die Form an:

$$\begin{aligned} x &= +A^3\varphi''a - 3Aa\varphi'a, \\ y &= -A^3a\varphi''a + (2a^2-1)A\varphi'a, \\ z &= +A^4\varphi''a - 2A^2a\varphi'a + \varphi a - C, \end{aligned}$$

aus welchen die einzige Quantität a zu eliminiren ist. Man gelangt also durch diese Annahme nicht zu einer Fläche, sondern zu einer Linie. Hiernach werden

$$\varphi a = a, \qquad \psi b = b$$

zuversichtlich die einfachsten Werthe sein, die man den willkürlichen Functionen beilegen kann; durch dieselben erhält man:

$$11. \quad \begin{cases} x = -3Aa - 3Bb, \\ y = (2a^2-1)A + (2b^2-1)B, \\ z = -2A^2a + a + 2B^2b - b, \end{cases}$$

oder, nach Elimination von $A = \sqrt{(-1-a^2)}$ und $B = \sqrt{(-1-b^2)}$,

$$\left(\frac{(2a^2-1)x + 3ay}{(1+2ab)(a-b)}\right)^2 + 9(1+b^2) = 0,$$

$$\left(\frac{(2b^2-1)x + 3by}{(1+2ab)(a-b)}\right)^2 + 9(1+a^2) = 0,$$

$$z - (a-b)(3+2a^2+2ab+2b^2) = 0.$$

Aber der Versuch, a und b aus diesen Gleichungen zu eliminiren, ist fast unausführbar, und um so weniger anzustellen, als das Resultat, gesetzt auch, es stellte wirklich eine Fläche dar, doch von so hohem Grade sein würde, dafs man an eine Benutzung dieser Fläche zu dem Zwecke, um dessentwillen die speciellen Flächen allein gesucht werden, nicht im Entferntesten denken könnte; der Zweck kann offenbar kein anderer sein, als: durch die Zusammenstellung der gemeinschaftlichen Eigenschaften verschiedener specieller Flächen, zu einer Eigenschaft der allgemeinen Fläche zu gelangen. Noch ungleich weitläufiger wird die Rechnung, wenn man den willkürlichen Functionen Werthe beilegt, deren zweite Differentialquotienten nicht verschwinden; und so wird sich aus den Gleichungen (3.), trotz dem, dafs die Integrale aus ihnen verschwunden sind, wohl kaum ein bemerkenswerthes Resultat herleiten lassen.

3.

Wenden wir uns nun zu den Gleichungen (2.), welche vor der Form (4.) den Vorzug haben, dafs in ihnen die irrationale Quantität $\sqrt{(1+a^2)}$ verkömmt, welche offenbar für die Rechnung bequemer ist, als

die: $\sqrt{[1+(\varphi' a^2)]}$. Setzt man $\varphi' a = iA$, wo A eine willkürliche Function von a bezeichnet, und $i^2 = -1$ ist, so wird $\varphi a - a\varphi' a = -\int a\varphi'' a . da$ $= -i\int a\, dA = -i\int aA' da$ und $i\int\sqrt{(1+a^2)}\varphi'' a\, da = -\int\sqrt{(1+a^2)}A' da$; macht man die ähnlichen Annahmen in Beziehnng auf b, so wird

$$12. \quad \begin{cases} x = iA + iB, \\ y = -i\int aA' da - i\int bB' db, \\ z = -i\int\sqrt{(1+a^2)}A' da + \int\sqrt{(1+b^2)}B' db. \end{cases}$$

Unter dieser Form wollen wir hier beständig das Integral der Gleichuug (1.) gebrauchen. Die zuerst sich darbietende Annahme ist auch hier offenbar: A' und B' Constanten gleich zu setzen. Es sei also

$$A' = C, \quad B' = C';$$

hierdurch erhält man:

$$x = Cia + C'ib,$$

$$y = -\frac{Cia^2}{2} - \frac{C'ib^2}{2},$$

$$z = -\frac{Ca\sqrt{(1+a^2)}}{2} + \frac{C'b\sqrt{(1+b^2)}}{2} + \tfrac{1}{2}C\log[\sqrt{(1+a^2)} - a] - \tfrac{1}{2}C'\log[\sqrt{(1+b^2)} - b].$$

Setzt man hier, um den einfachsten Fall zu erhalten, $C' = -C$, und x, y, z resp. für $\frac{x}{C}$, $\frac{y}{C}$, $\frac{z}{z}$, so wird

$$x = i(a-b),$$

$$y = -\frac{i}{2}(a^2 - b^2),$$

$$z - \tfrac{1}{2}a\sqrt{(1+a^2)} + \tfrac{1}{2}b\sqrt{(1+b^2)} = \tfrac{1}{2}\log\{[\sqrt{(1+a^2)} - a][\sqrt{(1+b^2)} - b]\},$$

folglich

$$13. \quad \tfrac{1}{2}e^{2z+a\sqrt{(1+a^2)}+b\sqrt{(1+b^2)}} + \tfrac{1}{2}e^{-2z-a\sqrt{(1+a^2)}-b\sqrt{(1+b^2)}} = \sqrt{(1+a^2)}\sqrt{(1+b^2)} + ab.$$

Nun aber ist

$$a = -\frac{y}{x} - \frac{ix}{2}, \qquad b = -\frac{y}{x} + \frac{ix}{2},$$

also

$$1 + a^2 = t + iy, \qquad 1 + b^2 = t - iy,$$

wenn, Kürze halber,

$$14. \quad 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{4} = t$$

gesetzt wird. Setzt man nun

$$t = \varrho\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\sin\vartheta,$$

folglich

15. $\varrho^2 = t^2+y^2,$

so wird

$$\sqrt{(1+a^2)} = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + i\sin\tfrac{1}{2}\vartheta), \qquad \sqrt{(1+b^2} = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - i\sin\tfrac{1}{2}\vartheta),$$

also

$$a\sqrt{(1+a^2)} + b\sqrt{(1+b^2)} = -\frac{2\varrho^{\frac{1}{2}}y}{x}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + 2\varrho^{\frac{1}{2}}x\sin\tfrac{1}{2}\vartheta$$

$$= -\frac{y}{x}\sqrt{(2\varrho+2t)} + x\sqrt{(2\varrho-2t)},$$

$$\sqrt{(1+a^2)}\sqrt{(1+b^2)} + ab = \varrho + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4}.$$

Werden also diese Resultate in (13.) gesetzt, so erhält man:

16. $$\tfrac{1}{2}e^{2z-\frac{y}{x}\{\sqrt{(2\varrho+2t)}+x\sqrt{(2\varrho-2t)}} + \tfrac{1}{2}e^{-2z+\frac{y}{x}\sqrt{(2\varrho+2t)}-x\sqrt{(2\varrho-2t)}} = \varrho + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4},$$

in wecher Gleichung t und ϱ durch (14.) und (15.) bestimmt, und $\frac{x}{C}$, $\frac{y}{C}$, $\frac{z}{C}$ resp. für x, y, z gesetzt werden müssen. Dies ist also der Gleichung einer neuen, von den bisher bekannten sich sehr wesentlich unterscheidenden, Fläche.

4.

Man versuche hierauf, für die willkürlichen Functionen ganze Potenzen zu setzen. Man kann aber gleich Anfangs bemerken, dafs man dann von den negativen ganzen Potenzen nur die $(-1)^{\text{te}}$ zu untersuchen braucht. Ist nämlich erstens

$$A' = Ca^m, \qquad B' = C'b^n,$$

wo C und C' beliebige Constanten bezeichnen, so erhält man

$$x = \frac{Cia^{m+1}}{m+1} + \frac{C'ib^{n+1}}{n+1},$$

$$y = -\frac{Cia^{m+2}}{m+2} - \frac{C'ib^{n+2}}{n+2},$$

$$z = -C\int\sqrt{(1+a^2)}.a^m\,da + C'\int\sqrt{(1+b^2)}.b^n\,db.$$

Ist hingegen zweitens

$$A' = \frac{C}{a^{m+3}}, \qquad B' = \frac{C'}{b^{n+3}},$$

so wird

$$x = -\frac{Ci}{(m+2)a^{m+2}} - \frac{C'i}{(n+2)b^{n+2}},$$

$$y = \frac{Ci}{(m+1)a^{m+1}} + \frac{C'i}{(n+1)b^{n+1}},$$

$$z = -C\int\frac{\sqrt{(1+a^2)}}{a^{m+3}}\,da + C'\int\frac{\sqrt{(1+b^2)}}{b^{n+3}}\,db.$$

Wird aber in diesen Gleichungen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ resp. an die Stelle von a, b gesetzt, so erhält man ganz dieselben Werthe für y, x, $-z$, die man bei der ersten Annahme für x, y, z erhalten hatte. Die Resultate werden sich also auch nur auf die so eben angegebene Weise von einander unterscheiden, und folglich dieselben reellen oder imaginairen Flächen darstellen. Setzt man nun

$$m = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

so wird

$$-(m+3) = -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ \ldots.$$

woraus hervorgeht, dafs, mit Ausnahme der $(-1)^{\text{ten}}$ und $(-2)^{\text{ten}}$, die eben dasselbe Resultat geben, jede negative Potenz durch eine positive repräsentirt wird.

Es sei also gegenwärtig

$$A' = \frac{C}{a}, \qquad B' = \frac{C'}{b},$$

so erhält man auch hier den bei weiten einfachsten Fall, wenn man $C' = -C$ setzt. Hierdurch wird

$$x = i \log \frac{a}{b},$$

$$y = -i(a-b),$$

$$z + \sqrt{(1+a^2)} + \sqrt{(1+b^2)} = \log \left\{\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)} + \frac{1}{a}\right]\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)} + \frac{1}{b}\right]\right\},$$

wo Kürze halber x, y, z für $\frac{x}{C}$, $\frac{y}{C}$, $\frac{z}{C}$ gesetzt sind. Die letzte Gleichung giebt:

$$17. \qquad \tfrac{1}{2} e^{z+\sqrt{(1+a^2)}+\sqrt{(1+b^2)}} + \tfrac{1}{2} e^{-z-\sqrt{(1+a^2)}-\sqrt{(1+b^2)}} = \frac{\sqrt{(1+a^2)}\sqrt{(1+b^2)}+1}{ab}.$$

Da aber $e^{-ix} = \frac{a}{b}$, also $b = a e^{ix}$, so ist

$$iy = a - b = -2ia\, e^{\frac{ix}{2}} \sin \tfrac{1}{2}x,$$

daher

$$a = -\frac{y e^{-\frac{1}{2}ix}}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \qquad b = -\frac{y e^{\frac{1}{2}ix}}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

und

$$1 + a^2 = \frac{t - iy^2 \sin x}{4 \sin \frac{1}{2}x^2}, \qquad 1 + b^2 = -\frac{t + iy^2 \sin x}{4 \sin \frac{1}{2}x^2},$$

wenn

$$18. \qquad 4 \sin \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 \cos x = t$$

gesetzt wird. Nun sei

$$t = \varrho \cos \vartheta, \qquad y^2 \sin x = \varrho \sin \vartheta,$$

also

$$19. \qquad \varrho^2 = t^2 + y^4 \sin x^2,$$

so wird

$$\sqrt{(1+a^2)} + \sqrt{(1+b^2)} = \frac{\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}t)}}{\sin \frac{1}{2}x}$$

und

$$\sqrt{(1+a^2)}\sqrt{(1+b^2)} = \frac{\varrho}{4 \sin \frac{1}{2}x^2}.$$

Werden also diese Werthe in (17.) substituirt, so erhält man

$$20. \quad \tfrac{1}{2} e^{z + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \sqrt{(\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}t)}} + \tfrac{1}{2} e^{-z - \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \sqrt{(\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}t)}} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}x^2 + \varrho}{y^2},$$

wo t und ϱ durch (18.) und (19.) bestimmt werden, und $\frac{x}{C}$, $\frac{y}{C}$, $\frac{z}{C}$ für x, y, z zu setzen ist. Dies ist also abermals eine neue, der Gleichung $h = 0$ Genüge leistende, Fläche.

5.

Man setze drittens

$$A' = Ca, \qquad B' = C'b,$$

so wird

$$x = +\tfrac{1}{2} i (Ca^2 + C'b^2),$$
$$y = -\tfrac{1}{3} i (Ca^3 + C'b^3),$$
$$z = -\tfrac{1}{3} C(1+a^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{3} C'(1+b)^{\frac{3}{2}},$$

und das Resultat der Elimination von a und b ist also gegenwärtig, wie in allen den Fällen, wo $A' = Ca^{2n-1}$ oder $= \frac{C}{a^{2n+2}}$ gesetzt, und eine ähnliche Annahme für B' gemacht wird, in einer algebraischen Gleichung enthalten. Aber selbst in dem einfachsten Falle, der auch hier wieder in $C + C' = 0$ enthalten ist, führt die Elimination von b auf 2 Gleichungen für a vom vierten und vom sechsten Grade, so, dafs es nicht die Mühe lohnt, die Rechnung weiter fortzusetzen. Mit noch geringerem Erfolge wird man es versuchen, $A' = Ca^2$, Ca^3 u. s. f. anzunehmen.

6.

Es sei viertens $A' = \frac{C}{1+a^2}$, so wird

$$A = C \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = a),$$
$$\int a A' da = \tfrac{1}{2} C \log(1+a^2),$$
$$\int \sqrt{(1+a^2)} A' da = C \log[\sqrt{(1+a^2)} - a].$$

Macht man nun die ähnliche Annahme für B', und setzt Kürze halber $\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = a) = \alpha$, $\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = b) = \beta$, so wird

$$x = i(C\alpha + C'\beta),$$
$$y = i(C\log\cos\alpha + C'\log\cos\beta),$$
$$z = C\log\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha) + C'\log\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\beta).$$

Hier ist, wie man leicht bemerken wird, nur in den Fällen an eine Elimination zu denken, wo entweder $C = C'$, oder $C = -C'$.

Es sei also erstens $C = C' = \frac{1}{2Di}$; auch setze man $2Da$ und $2Db$ resp. für α, β, so wird

$$21.\quad \begin{cases} x = a + b, \\ y = \frac{1}{2D}\log(\cos 2Da.\cos 2Db), \\ z = \frac{-i}{2D}\log[\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi - Da).\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + Db)], \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen nun a und b zu eliminiren ist. Aber dies sind ganz dieselben Gleichungen, die in meiner oben angeführten Abhandlung pag. 274 angegeben sind, nur dafs y mit z verwechselt ist. Wie dort, folgt auch aus denselben:

$$e^{Dy} = \frac{\cos Dx}{\cos Dz},$$

welches die bereits bekannte Fläche (6.) ist, da es erlaubt ist, die Coordinaten mit einander zu verwechseln.

Es sei zweitens $C = -C' = \frac{1}{2Di}$, und es werde abermals α und β resp. für a und b gesetzt, so wird

$$22.\quad \begin{cases} x = a - b, \\ y = \frac{1}{2D}\log\frac{\cos 2Da}{\cos 2Db}, \\ z = \frac{1}{2Di}\log[\operatorname{tang}\frac{1}{4}\pi - Da)\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi - Db)]. \end{cases}$$

Um aus dieser Gleichung a und b zu eliminiren, wollen wir zuerst einen ganz directen Weg einschlagen. Es ist

$$e^{2Dy} = \frac{1-\operatorname{tang}Da^2}{1+\operatorname{tang}Da^2}\cdot\frac{1+\operatorname{tang}Db^2}{1-\operatorname{tang}Db^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1+\operatorname{tang}(Da-Dx)^2}{1-\operatorname{tang}(Da-Dx)^2},$$

wenn Kürze halber $\operatorname{tang}Da = \alpha$ gesetzt wird. Setzt man auf gleiche Weise $\operatorname{tang}Dx = \zeta$, so hat man

$$\frac{1+\operatorname{tang}(Da-Dx)^2}{1-\operatorname{tang}(Da-Dx)^2} = \frac{(1+\alpha\zeta)^2+(\alpha-\zeta)^2}{(1+\alpha\zeta)^2-(\alpha-\zeta)^2} = \frac{(1+\alpha^2)(1+\zeta^2)}{(1-\alpha^2)(1-\zeta^2)+4\alpha\zeta},$$

also

$$e^{2Dy} = \frac{(1-\alpha^2)(1+\zeta^2)}{(1-\alpha^2)(1-\zeta^2)+4\alpha\zeta} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)\cos 2Dx+2\alpha\sin 2Dx},$$

oder

$$23. \qquad e^{-2Dy} = \cos 2Dx - \frac{2\sin 2Dx}{\alpha - \alpha^{-1}}.$$

Ferner geben die Gleichungen (22.)

$$e^{2Dz.i} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Da)\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Da + Dx) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1+\zeta+\alpha+\alpha\zeta}{1-\zeta+\alpha+\alpha\zeta},$$

woraus sich leicht, wenn

$$24. \qquad \varrho^2 = \zeta^2 + \sec Dz^2$$

gesetzt wird,

$$\alpha = \frac{\varrho - 1}{\zeta + i\operatorname{tang} Dz}$$

ergiebt. Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(\varrho-1)^2 - (\zeta + i\operatorname{tang} Dz)^2}{2(\varrho-1)(\zeta + i\operatorname{tang} Dz)} = \frac{\sec Dz - \varrho\cos Dz - \zeta\sin Dz.i}{(\varrho-1)(\zeta\cos Dz + \sin Dz.i)}.$$

Multiplicirt man dieses Ausdrucks Zähler und Nenner durch

$$\sec Dz - \varrho\cos Dz + \zeta\sin Dz.i,$$

so wird, nach leichten Umformungen, der Zähler $=(\varrho-1)^2$, und, nach Weglassung des Factors $\varrho-1$, wird der Nenner

$$= -(\varrho-1)\zeta\cos Dz^2 + \sin Dz\cos Dz[\zeta^2 + \sec Dz^2 - \varrho]\,i,$$

also, in Folge von (24.),

$$= (\varrho-1)[-\zeta\cos Dz^2 + \varrho\sin Dz\cos Dz.i];$$

folglich haben Zähler und Nenner von $\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ den gemeinschaftlichen Factor $(\varrho-1)^2$, und man erhält

$$\frac{2}{\alpha - \alpha^{-1}} = -\zeta\cos Dz^2 + \varrho\sin Dz\cos Dz.i.$$

Setzt man nunmehr diesen Werth in (23.), und restituirt für ζ seinen Werth $\operatorname{tang} Dx$, so ergiebt sich

$$25. \qquad e^{-2Dy} = 1 - 2\sin Dx^2\sin Dz^2 - \tfrac{1}{2}\varrho\sin 2Dx\sin 2Dz.i,$$

als Resultat der Elimination von a und b aus den Gleichungen (22.). Hier sieht man nun sogleich, dafs, für ein reelles D, diese Gleichung eine **Linie** und nicht eine Fläche darstellt. Denn, da sie die Form $U + Vi = 0$ hat, so mufs $U=0$, $V=0$ sein; diese beiden Gleichungen stellen also eine Linie dar, ausgenommen, wenn die eine derselben durch die andere befriedigt wird. Dies ist aber offenbar hier unmöglich, da U Exponentialgröfsen und Kreisfunctionen, V aber nur Kreisfunctionen enthält.

7.

Man setze aber in dieselbe Gleichung (25.) Di statt D, so nimmt sie die Form

$$\cos 2Dy - i\sin 2Dy = 1 - 2\left(\frac{e^{Dx}-e^{-Dx}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{Dz}-e^{-Dz}}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\varrho(e^{2Dx}-e^{-2Dx})(e^{2Dz}-e^{-2Dz})\,i$$

an, wo

$$\varrho^2 = 1 - \left(\frac{e^{Dx}-e^{-Dx}}{e^{Dx}+e^{-Dx}}\right)^2 - \left(\frac{e^{Dz}-e^{-Dz}}{e^{Dz}+e^{-Dz}}\right)^2,$$

oder, indem man

$$\frac{e^{Dx}+e^{-Dx}}{2} = \gamma, \qquad \frac{e^{Dx}-e^{-Dx}}{2} = \gamma',$$
$$\frac{e^{Dz}+e^{-Dz}}{2} = \delta, \qquad \frac{e^{Dz}-e^{-Dz}}{2} = \delta',$$

setzt,

$$26. \qquad \sin Dy^2 - \gamma'^2\delta'^2 + [\sin Dy \cos Dy + \varrho\,\gamma\delta\gamma'\delta']\,i = 0.$$

Auch diese Gleichung hat also die Form $U + Vi = 0$, und sie würde demnach gleichfalls eine Linie darstellen, wenn nicht dadurch, dafs $U = 0$ gesetzt wird, zu gleicher Zeit die Gleichung $V = 0$ befriedigt würde. Dies geschieht aber in der That. Denn es sei

$$27. \qquad \sin Dy^2 = \gamma'^2\delta'^2,$$

so wird hierdurch der Factor von i, in (26.), $=$

$$\gamma'\delta'(\cos Dy \pm \varrho\,\gamma\delta).$$

Da aber

$$\gamma^2 - \gamma'^2 = \delta^2 - \delta'^2 = 1,$$

so ist

$$\cos Dy^2 = 1 - \gamma'^2\delta'^2 = \gamma^2\delta^2\left(1 - \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} - \frac{\delta'^2}{\delta^2}\right) = \gamma^2\delta^2\varrho^2,$$

und folglich

$$\cos Dy \pm \varrho\,\gamma\delta = 0.$$

Es verschwindet also dadurch, dafs der reelle Theil von (26.) $= 0$ gesetzt wird, auch der imaginäre, und demnach ist (27.)

$$28. \qquad \sin Dy = \pm\left(\frac{e^{Dx}-e^{-Dx}}{2}\right)\left(\frac{e^{Dz}-e^{-Dz}}{2}\right)$$

die Gleichung einer neuen, der Gleichung $h = 0$ Genüge leistenden, Fläche, wo es gleichgültig ist, welches Vorzeichen man dem zweiten Theile vorsetzt, da das eine in das andere übergeht, wenn man D in $-D$ verwandelt.

Aus dem Bisherigen geht also hervor, dafs, da die Gleichung (27.) sowohl dem reellen, als dem imaginären Theile von (26.) besonders Genüge leistet, diese unter die Form

$$(\sin Dy^2 - \gamma'^2\delta'^2)^p\,[(\sin Dy^2 - \gamma'^2\delta'^2)^{1-p} + Wi] = 0$$

mufs gesetzt werden können, wo W eine noch unbekannte Function von x, y, z, und p einen positiven, ächten Bruch vorstellt, der auch $= 1$ sein

kann. Dieser Gleichung wird nun zwar auch Genüge geleistet, wenn man den zweiten Factor besonders $=0$ setzt. Da aber die hieraus sich ergebende Gleichung auf keine Weise eine Fläche darstellen kann, so ist die Kenntnifs desselben um so mehr überflüssig, als sich leicht übersehen läfst, dafs er nur ein, durch die Elimination von a und b in die Rechnung gekommener, überflüssiger Factor ist. Man kann nämlich die Gleichung (28.) aus (22.), ohne dafs sie mit jenem Factor behaftet wäre, herleiten. Dies geht auf folgende Weise an. Setzt man in die drei Gleichungen (22.) Di statt D, so geht die zweite in folgende über:

$$y = \frac{1}{2Di} \log \frac{e^{2Da} + e^{-2Da}}{e^{2Db} + e^{-2Db}},$$

oder, wenn

$$e^{2Da} + e^{-2Da} = F, \qquad e^{2Db} + e^{-2Db} = G,$$
$$e^{Da} + e^{-Da} = f, \qquad e^{Db} + e^{-Db} = g,$$
$$e^{Da} - e^{-Da} = f', \qquad e^{Db} - e^{-Db} = g',$$

gesetzt wird, so ist

$$e^{Dyi} = \sqrt{\left(\frac{F}{g}\right)},$$

also

$$29. \qquad i \sin Dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F}{G}\right)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{G}{F}\right)} = \frac{F-G}{2\sqrt{(Fg)}}.$$

Auf diese Weise wird die dritte Gleichung (22.):

$$e^{-2Dz} = \frac{1-\tang Dia}{1+\tang Dia} \cdot \frac{1-\tang Dib}{1+\tang Dib} = \frac{f-if'}{f+if'} \cdot \frac{g-ig'}{g+ig'} = \frac{(f-if')^2(g-ig')^2}{(f^2+f'^2)(g^2+g'^2)},$$

folglich

$$e^{-Dz} = \pm \frac{f-if'}{\sqrt{(f^2+f'^2)}} \cdot \frac{g-ig'}{\sqrt{(g^2+ig'^2)}}, \text{ und } e^{Dz} = \pm \frac{f+if'}{\sqrt{(f^2+f'^2)}} \cdot \frac{g+ig'}{\sqrt{(f^2+f'^2)}},$$

wo beide Male dieselben Vorzeichen zu setzen sind. Demnach ist

$$\frac{e^{Dz} - e^{-Dz}}{2} = \pm \frac{(f'g+fg')i}{\sqrt{(f^2+f'^2)}\sqrt{(g^2+g'^2)}},$$

oder, wenn man für $f, g, \ldots$ ihre Werthe setzt, und bemerkt, dafs $f^2+f'^2 = 2F$, $g^2+g'^2 = 2G$:

$$\frac{e^{Dz} - e^{-Dz}}{2} = \pm \frac{e^{D(a+b)} - e^{-D(a+b)}}{\sqrt{(FG)}} i.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} = \frac{e^{D(a-b)} - e^{-D(-b)}}{2},$$

so wird das Product der zweiten Theile

$$= \pm \frac{e^{2Da} + e^{-2Da} - e^{2Db} - e^{-2Db})}{2\sqrt{(FG)}} i = \frac{(F-G)}{2\sqrt{(FG)}} i = \pm \sin Dy \text{ (wegen (29.))};$$

folglich ist

$$\sin Dy = \pm \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dz} - e^{-Dz}}{2};$$

mit (28.) übereinstimmend.

Verwechselt man die Zeichen der veränderlichen Coordinaten, und setzt

$$30. \qquad \sin Dz = \pm \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dy} - e^{-Dy}}{2},$$

so findet man für die Krümmungshalbmesser dieser Fläche folgenden einfachen Ausdruck:

$$R = \pm \frac{1}{D} \cdot \frac{e^{Dx} + e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dy} + e^{-Dy}}{2} = \pm \frac{1}{4D} \cdot \frac{\sin Dz'}{\sin Dz},$$

wo z' die dritte Ordinate des Punctes anzeigt, dessen beiden andern Coordinaten $2x$ und $2y$ sind.

8.

Es ist bereits oben bemerkt worden, dafs man die Gleichung $e^{Dy} = \frac{\cos Dx}{\cos Dz}$ aus (21.), also $e^{Dz} = \frac{\cos Dy}{\cos Dx}$, aus Monge's Form (4.) erhält, wenn man

$$31. \qquad \varphi a = \frac{i}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Da), \qquad \psi b = -\frac{i}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Db)$$

setzt, und beiden Wurzelgröfsen in z dasselbe Vorzeichen giebt. Ferner haben wir die Gleichung (28.) aus (22.) hergeleitet. Verwechselt man also y und z, und setzt $-b$ statt b, so sieht man, dafs

$$\sin Dz = \pm \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2} \cdot \frac{e^{Dy} - e^{-Dy}}{2}$$

das Resultat der Elimination von a und b aus den Gleichungen

$$x = a + b,$$

$$y = -\frac{1}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Dia) + \frac{1}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Dib),$$

$$z = \frac{1}{2Di} \log \cos 2Dia - \frac{1}{2Di} \log \cos 2Dib$$

ist, welche abermals die Form der Gleichungen (4.) haben, indem

$$32. \qquad \varphi a = -\frac{1}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Dia), \qquad \psi b = \frac{1}{2D} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Dib)$$

gesetzt wird, und den Wurzelgröfsen in z entgegengesetzte Zeichen beigelegt werden. Beide Annahmen unterscheiden sich also blofs dadurch, dafs das erste Mal den Wurzelgröfsen dasselbe, das zweite Mal verschiedene Vorzeichen vorgesetzt, und in diesem Falle ein imaginärer, in jenem ein reeller Parameter angenommen werden mufste, um eine reelle Fläche zu erhalten. Diese Bemerkung führte uns darauf, zu versuchen,

ob sich noch neue Flächen ergeben, wenn man, statt, wie in diesen beiden Fällen (31.) und (32.), den willkürlichen Functionen verschiedene Vorzeichen beizulegen, ihnen dasselbe giebt, dann den Wurzelgröfsen in z abwechselnd dasselbe oder ein verschiedenes Zeichen vorsetzt, und den Parameter in allen Fällen sowohl reell als imaginär annimmt.

Diese Annahmen haben folgende Resultate gegeben: Aus den Gleichungen

$$x = a + b,$$

$$y = \frac{i}{2D}\log\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Da) + \frac{i}{2D}\log\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - Db),$$

$$z = \pm\frac{1}{2D}\log(\cos 2Da \,.\, \cos 2Db)$$

folgt, durch Elimination von a und b:

$$33. \qquad \pm 2\sin Dz = \frac{e^{Dy} - e^{-yD}}{e^{Dx} - e^{-Dx}} + \frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{e^{Dy} - e^{-Dy}}.$$

Nimmt man zweitens x und y wie vorher an, setzt aber

$$z = \pm\frac{1}{2D}\log\frac{\cos 2Da}{\cos 2Db},$$

so erhält man

$$34. \qquad \pm\cos Dz = \frac{e^{Dx} + e^{-Dx}}{2}\cdot\frac{e^{Dy} + e^{-Dy}}{2}.$$

Auch bemerke man noch, dafs die auf einem andern Wege, als dem bisherigen, herzuleitende Gleichung

$$35. \qquad \pm 2\cos Dz = \frac{e^{Dx} + e^{-Dx}}{e^{Dy} + e^{-Dy}} + \frac{e^{Dy} + e^{-Dy}}{e^{Dx} + e^{-Dx}}$$

der Gleichung (1.) Genüge leistet. Aber man übersieht sehr leicht, dafs, man mag den Parameter D reell oder imaginär annehmen, keine dieser Gleichungen (33.), (34.), (35.) eine Fläche darstellt, da für reelle Werthe von x und y, $\sin Dz$ und $\cos Dz$ gröfser als die Einheit werden.

Aufser den bisher untersuchten habe ich noch folgende Annahmen: $A' = \frac{Ca}{1+a^2}$, $\frac{C}{a(1+a^2)}$, $\frac{C}{\sqrt{(1+a^2)}}$, $C\sqrt{(1+a^2)}$, $\frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$, $aC\sqrt{(1+a^2)}$, $\frac{C}{a\sqrt{(1+a^2)}}$, $\frac{C\sqrt{(1+a^2)}}{a}$ untersucht. Sie haben aber entweder nur zu den bereits erhaltenen Resultaten, oder zu imaginären Flächen, oder zu der Umdrehungsfläche der Kettenlinie geführt; oder die Elimination liefs sich nicht bewerkstelligen; weswegen ich es für unnöthig halte, sie einzeln hier durchzugehen.

Zu der Schraubenfläche (6.) und der Umdrehungsfläche der Kettenlinie (8.) sind also gegenwärtig noch fünf, durch die Gleichungen (7.),

(9.), (16.), (20.), (30.) dargestellte, neue Flächen hinzugekommen, deren erste ich, in ihrer speciellen Form (6.), im Verein mit der letzten, in einer bald folgenden Abhandlung besonders untersuchen werde, und deren zweite, wie bereits erwähnt, die merkwürdige Eigenschaft hat, dafs zwei, in Entstehungsart und Form sich auf das Bestimmteste von einander unterscheidende, Flächen als specielle Fälle von ihr erscheinen.

9.

Wir gehen nun zu der angekündigten zweiten Untersuchung über, durch welche wir zu entscheiden suchen, welche Form die willkürlichen Functionen in dem Integrale (12.) haben müssen, wenn die kleinste Fläche durch Bewegung einer geraden Linie entstanden sein soll. Hierbei werden wir so zu Werke gehen, dafs wir zuerst aus den Gleichungen (12.) die Werthe von p, q, r, s, t herleiten werden, die der Gleichung (1.) der kleinsten Fläche angehören; diese Werthe werden wir alsdann in die allgemeine Gleichung der durch Bewegung einer geraden Linie entstandenen Fläche substituiren, und uns auf diese Weise eine neue Gleichung verschaffen, die beiden genannten Flächen angehört; die Integration derselben führt dann zu der gewünschten Form der willkürlichen Functionen.

Durch Differentiation des Systems der Gleichungen (12.) hat man nämlich:

$$36.\quad \begin{cases} dx = iA'da + iB'db, \\ dy = -iaA'da - ibB'db, \\ dz = -\sqrt{(1+a^2)}A'da + \sqrt{(1+b^2)}B'db. \end{cases}$$

Da aber z eine Function von x und y ist, so hat man auch

$$dz = pdx + qdy = iA'(p - qa)da + iB'(p - qb)db,$$

welches, mit dem obigen Werthe von dz verglichen,

$$37.\quad \begin{cases} p - qa - i\sqrt{(1+a^2)} = 0, \\ p - qb + i\sqrt{(1+b^2)} = 0, \end{cases}$$

also

$$38.\quad \begin{cases} p = \dfrac{ib\sqrt{(1+a^2)} + ia\sqrt{(1+b^2)}}{b-a}, \\ q = \dfrac{i\sqrt{(1+a^2)} + i\sqrt{(1+b^2)}}{b-a} \end{cases}$$

giebt. Ferner ist

$$dp = rdx + sdy = iA'(r - sa)da + iB'(r - sb)db,$$
$$dq = sdx + tdy = iA'(s - ta)da + iB'(s - tb)db,$$

also

$$\left(\frac{dp}{da}\right) = iA'(r-sa), \qquad \left(\frac{dq}{da}\right) = iA'(s-ta),$$
$$\left(\frac{dp}{db}\right) = iB'(r-sb), \qquad \left(\frac{dq}{db}\right) = iB'(s-tb).$$

Vermittelst dieser Werthe erhält man, durch Differentiation der Gleichungen (37.) in Beziehung auf a und b:

$$iA'(r-sa)-iA'(s-ta)a-q-\frac{ia}{\sqrt{(1+a^2)}} = 0,$$
$$r-sb-(s-tb)a = 0,$$
$$iB'(r-sb)-iB'(s-tb)b-q+\frac{ib}{\sqrt{(1+b^2)}} = 0,$$

d. h., wenn für q sein Werth gesetzt wird:

$$39. \quad \begin{cases} r-2as+a^2t = \frac{C}{\alpha^2}, \\ r-(a+b)s+abt = 0, \\ r-2bs+b^2t = \frac{C}{\beta^2}, \end{cases}$$

wo Kürze halber

$$40. \quad \begin{cases} \frac{1+ab+\sqrt{(1+a^2)}\sqrt{(1+b^2)}}{b-a} = C, \\ \sqrt{(1+a^2)}.A' = \alpha^2, \\ \sqrt{(1+b^2)}.B' = \beta^2 \end{cases}$$

gesetzt worden ist. Multiplicirt man nun die drei Gleichungen (39.) resp. durch

	b^2,	$-2ab$,	$+a^2$,
alsdann durch	b,	$-(a+b)$,	a,
endlich durch	1,	-2,	$+1$,

und addirt, so erhält man

$$41\,^*). \quad \begin{cases} (b-a)^2 r = \frac{b^2 C}{\alpha^2}+\frac{a^2 C}{\beta^2}, \\ (b-a)^2 s = \frac{bC}{\alpha^2}+\frac{aC}{\beta^2}, \\ (b-a)^2 t = \frac{C}{\alpha^2}+\frac{C}{\beta^2}. \end{cases}$$

---

*) Beiläufig mag bemerkt werden, wie man vermittelst (38.) und (41.) sehr leicht zeigen kann, dafs die Gleichungen (12.) das Integral von $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$ darstellen. Denn bezeichnet man die Zähler von p nnd q in (38.) durch p' und q', und setzt die Resultate aus (38.) und (41.) in den ersten Theil der eben genannten Gleichung, so wird derselbe $=$

$$h = \frac{C}{(b-a)^4}\left\{\frac{1}{\alpha^2}[(1+b^2)(b-a)^2+(p'-bq')^2]+\frac{1}{\beta^2}[(1+a^2)(b-a)^2+(p'-aq')^2]\right\}.$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} dr &= \lambda dx + \mu dy = iA'(\lambda - \mu a)da + iB'(\lambda - \mu b)db, \\ ds &= \mu dx + \nu dy = iA'(\mu - \nu a)da + iB'(\mu - \nu b)db, \\ dt &= \nu dx + \omega dy = iA'(\nu - \omega a)da + iB'(\nu - \omega b)db, \end{aligned}$$

differentiirt die Gleichungen (39.), und zwar die erste in Beziehung auf a, die zweite auf a und auf b, die dritte auf b, bemerkt, dafs

$$\left(\frac{dC}{da}\right) = \frac{\sqrt{(1+b^2)}}{(b-a)^2}\left[\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)}} + \sqrt{(1+b^2)}\right] = \frac{\sqrt{(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)}} \cdot \frac{C}{b-a} = \frac{\beta^2 A'}{\alpha^2 B'} \cdot \frac{C}{b-a},$$

und auf gleiche Weise

$$\left(\frac{dC}{db}\right) = -\frac{\sqrt{(1+a^2)}}{\sqrt{(1+b^2)}} \cdot \frac{C}{b-a} = -\frac{\alpha^2 B'}{\beta^2 A'} \cdot \frac{C}{b-a},$$

und, dafs endlich $s - at = \frac{C}{(b-a)\alpha^2}$, $s - bt = -\frac{C}{(b-a)\beta^2}$: so erhält man, nach einfachen Reductionen:

$$42. \quad \begin{cases} \lambda - 3a\mu + 3a^2\nu - a^3\omega = \frac{Ci}{\alpha^2}\left[\frac{2}{(b-a)A'} + \frac{\beta^2}{(b-a)\alpha^2 B'} - \frac{2d\alpha}{\alpha A' da}\right], \\ \lambda - (2a+b)\mu + (a^2+2ab)\nu - a^2 b\omega = -\frac{Ci}{A'(b-a)\beta^2}, \\ \lambda - (a+2b)\mu + (2ab+b^2)\nu - ab^2\omega = -\frac{Ci}{B'(b-a)\beta^2}, \\ \lambda - 3b\mu + 3b^2\nu - b^3\omega = \frac{Ci}{\beta^2}\left[\frac{2}{(b-a)B'} + \frac{\alpha^2}{(b-a)\beta^2 A'} + \frac{2d\beta}{\beta B' db}\right]. \end{cases}$$

Setzt man die zweiten Theile dieser Gleichungen Kürze halber resp.

$$= -CiP, \quad CiQ, \quad -CiR, \quad CiS$$

und multiplicirt sie resp. durch *)

Da nun

$$\begin{aligned} p' - bq' &= -i(b-a)\sqrt{(1+b^2)}, \\ p' - aq' &= +i(b-a)\sqrt{(1+a^2)}, \end{aligned}$$

so ist der Factor von $\frac{1}{\alpha^2}$ sowohl, als der von $\frac{1}{\beta^2}$, besonders $= 0$, also $h = 0$, wie gehörig.

*) Diese und die oben angeführten Multiplicatoren der Gleichungen (39.) befolgen das Gesetz, dafs die in der obersten Horizontalreihe stehenden, die Glieder der Binomialreihe sind, und dafs aus jedem Factor von der Form $\Sigma k . a^p b^q$, wo k der numerische Coefficient ist, der darunter stehende Factor $= \Sigma \frac{k}{p+q}(p a^{p-1} b^q + q a^p b^{q-1})$ gebildet wird. Dafs dieselbe Bildungsweise bei der Bestimmung der fünf partiellen Differentialquotienten der vierten Ordnung, der sechs der fünften Ordnung u. s. f. angewandt werden kann, übersieht man leicht, wenn man untersucht, auf welche Weise die auf einander folgenden Potenzen von $b - a$ aus den so gebildeten Multiplicatoren und den Coefficienten resp. von p, q; r, s, t; $\lambda, \mu, \nu, \omega$ in (37.), (39.), (42.) zusammengesetzt sind.

alsdann durch
$$b^3, \quad -3ab^2, \quad +3a^2b, \quad -a^3,$$
hierauf durch
$$b^2, \quad -(b^2+2ab), \quad 2ab+a^2, \quad -a^2,$$
endlich durch
$$b, \quad -(2b+a), \quad 2a+b, \quad -a,$$
$$1, \quad -3, \quad 3, \quad -1,$$
so ergiebt sich

$$43. \quad \begin{cases} \frac{(b-a)^3\lambda i}{C} = \lambda' = b^3P + 3ab^2Q + 3a^2bR + a^3S, \\ \frac{(b-a)^3\mu i}{C} = \mu' = b^2P + (b^2+2ab)Q + (2ab+a^2)R + a^2S, \\ \frac{(b-a)^3\nu i}{C} = \nu' = bP + (2b+a)Q + (2a+b)R + aS, \\ \frac{(b-a)^3\omega i}{C} = \omega' = P + 3Q + 3R + S. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen werden also die vier Differentialquotienten der dritten Ordnung λ, μ, ν, ω, die der kleinsten Fläche angehören, bestimmt.

Nun ist bekanntlich die Gleichung jeder durch Bewegung einer geraden Linie entstandenen Fläche:

$$44. \quad \lambda + 3\mu m + 3\nu m^2 + \omega m^3 = 0,$$

aus welcher m vermittelst der Gleichung

$$45. \quad r + 2sm + tm^2 = 0$$

eliminirt werden mufs. Soll also die kleinste Fläche durch Bewegung einer geraden Linie entstanden sein, so müssen die Werthe von λ, μ, ν, ω, oder, was dasselbe ist, von λ', μ', ν', ω', der Gleichung (44.) Genüge leisten. Werden sie aber aus (43.) in (44.) substituirt, so erhält man

$$(b+m)^3P + 3(b+m)^2(a+m)Q + 3(b+m)(a+m)^2R + (a+m)^3S = 0,$$

also, wenn

$$\frac{a+m}{b+m} = n, \quad \text{und daher} \quad m = -\left(\frac{a-bn}{1-n}\right)$$

gesetzt wird:

$$46. \quad P + 3Qn + 3Rn^2 + S^3n = 0,$$

und die Gleichung (38.) geht hierdurch in folgende über:

$$r - 2as + ta^2 - 2(r - (a+b)s + abt)n + (r - 2bs + b^2t)n^2 = 0,$$

in welcher die Coefficienten der einzelnen Potenzen von n die ersten Glieder von (39.) sind. Folglich hat man

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\beta^2} = 0,$$

$$n = \frac{\beta i}{\alpha}.$$

Hierdurch wird nun (46.)

$$P\alpha^3 + 3Q\alpha\beta^3 i - 3R\alpha\beta^2 - S\beta^3 i = 0.$$

Setzt man hierin für P, Q, R, S, ihre Werthe aus (42.), so ergiebt sich:

$$\frac{1}{b-a}(\beta+\alpha i)\left(\frac{\alpha}{\beta A'} - \frac{\beta}{\alpha B'}\right) - \frac{d\alpha}{A'\,da} - \frac{i\,d\beta}{B'\,db} = 0;$$

oder, da $\frac{\alpha}{\beta A'} - \frac{\beta}{\alpha B'} = \frac{\sqrt{(1+a^2)} - \sqrt{(1+b^2)}}{\alpha\beta}$, so ist

$$47. \quad \left(\frac{\sqrt{(1+a^2)} - \sqrt{(1+b^2)}}{b-a}\right)\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{i}{\beta}\right] - \frac{d\alpha}{A'\,da} - \frac{d\beta}{B'\,db} = 0,$$

welcher Gleichung man folgende Form geben kann:

$$48. \quad \left[\frac{\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha} + \frac{a\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha^2}\cdot\frac{d\alpha}{da}\right] - \left[\frac{\sqrt{(1+b^2)}}{\beta} + \frac{b\sqrt{(1+b^2)}}{\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{db}\right] i$$
$$- \frac{\sqrt{(1+b^2)}}{\alpha} + \frac{i\sqrt{(1+a^2)}}{\beta} - \frac{b\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha^2}\cdot\frac{d\alpha}{da} + \frac{ai\sqrt{(1+b^2)}}{\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{db} = 0.$$

Durch diese Gleichung werden hiernach die beiden willkürlichen Functionen A, B, vermittelst der mit ihnen durch die Gleichungen (40.) verbundenen willkürlichen Functionen α, β, bestimmt. Nun bemerke man aber, dafs (48.) aus 3 sehr wesentlich verschiedenen Gattungen von Gliedern besteht, von denen die erste von a allein, die zweite von b allein, und die dritte von a und b zugleich abhängig ist. Da aber a und b von einander unabhängige Quantitäten sind, so kann jener Gleichung auf keine andere Art Grt Genüge geleistet werden, als dadurch, dafs man

$$49. \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha} + \frac{a\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha^2}\cdot\frac{d\alpha}{da} = F, \\ \frac{\sqrt{(1+b^2)}}{\beta} + \frac{b\sqrt{(1+b^2)}}{\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{db} = -Fi \end{cases}$$

setzt, wo F eine beliebige Constante ist, und dafs man diese, so wie die beiden durch die Integration der Gleichungen (49.) in die Rechnung kommenden Constanten, so bestimmt, dafs aufserdem, wenn dies möglich ist, noch der Gleichung

$$50. \quad -\frac{\sqrt{(1+b^2)}}{\alpha} + \frac{i\sqrt{(1+a^2)}}{\beta} - \frac{b\sqrt{(1+a^2)}}{\alpha^2}\cdot\frac{d\alpha}{da} + \frac{ai\sqrt{(1+b^2)}}{\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{db} = 0$$

Genüge geleistet werde. Die vollständigen Integrale von (49.) sind aber

$$\frac{1}{\alpha} = Ea + F\sqrt{(1+a^2)},$$
$$\frac{1}{\beta} = E'b - Fi\sqrt{(1+b^2)},$$

wo E, E' die Constanten der Integration sind. Hierdurch wird der erste Theil von (50.)

$$(E+E'i)(b\sqrt{(1+a^2)}-a\sqrt{(1+b^2)}),$$

und demnach wird jener Gleichung Genüge geleistet, indem man

$$E' = Ei$$

setzt, woraus

$$51. \quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = Ea+F\sqrt{(1+a^2)}, \\ \frac{1}{\beta} = i(Eb-F\sqrt{(1+b^2)} \end{cases}$$

folgt, wo E, F beliebige Constanten bezeichnen. Durch diese Gleichung ist jedoch noch nicht das vollständige Integral von (48.) bestimmt. Denn man kann ihr, wie aus der Form (47.) erhellt, auch noch auf eine particuläre Art Genüge leisten, indem man

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{i}{\beta} = 0,$$

also

$$\frac{1}{\alpha} = +D, \qquad \frac{1}{\beta} = -D$$

setzt, wo D eine neue Constante ist; und wenn man diese beiden Integrale in Eins vereinigt, so, dafs

$$\frac{1}{\alpha} = D+Ea+F\sqrt{(1+a^2)},$$
$$\frac{1}{\beta} = i(D+Eb-F\sqrt{(1+b^2)})$$

wird, so hat man die allgemeinen Formen erhalten, welche den willkürlichen Functionen α, β beigelegt werden müssen, wenn die kleinste Fläche durch Bewegung einer geraden Linie entstanden sein soll. Setzt man diese Werthe in (40.), so erhält man A', B', und, vermittelst (12.), sodann x, y, z ausgedrückt durch a und b. Der Integration steht kein Hindernifs im Wege, wohl aber der Elimination, so lange man nicht den Constanten specielle Werthe beilegt, welche die Rechnung vereinfachen. Die Systeme specieller Werthe aber, die sich zunächst darbieten, sind

$$E = 0, \quad F = 0,$$
$$F = 0, \quad D = 0,$$
$$D = 0, \quad E = 0.$$

Im ersten Falle hat man $\frac{1}{\alpha} = -\frac{i}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = 0$, folglich, vermöge (41.), $t = 0$, welche Gleichung nur auf die Schraubenfläche führt. (S. meine angef. Abh. pag. 225.)

Im zweiten Falle hat man $\frac{1}{a\alpha} = \frac{i}{b\beta}$, also $\frac{b^2}{\alpha^2} + \frac{a^2}{\beta^2}$, und folglich, vermöge derselben Gleichung (41.), $r = 0$, in welcher Gleichung abermals nur die Schraubenfläche enthalten ist.

Im dritten Falle ist $\frac{1}{\sqrt{(1+a^2).\alpha}} = -\frac{i}{\sqrt{(1+b^2).\beta}}$, folglich $\frac{1+b^2}{\alpha^2} + \frac{1+a^2}{\beta^2} = 0$. Hierdurch wird aber $r+t=0$, und auch diese Gleichung führt nur auf die Schraubenfläche (a. a. O. pag. 234). Es haben also die einzelnen Theile unserer für $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ gefundenen Ausdrücke die eigenthümliche Eigenschaft, dafs jeder von ihnen, für sich genommen, auf dieselbe Fläche führt, was, in Verbindung mit dem Umstande, dafs in der Gleichung der durch 2 grade Linien begrenzten kleinsten Fläche, wenn sie auf ihre einfachste Gestalt gebracht und von der Lage der Coordinaten unabhängig gemacht wird, nur eine Constante vorkommen kann, weil sie von 2 andern geraden Linien sich nur durch ihren Abstand unterscheiden, dafs also von einer Relation verschiedener Constanten, welche bewirken könnte, dafs die genannte kleinste Fläche verschiedene Gestalten haben könnte, nicht die Rede sein kann, es im höchsten Grade wahrscheinlich macht, dafs von allen Flächen nur die Schraubenfläche durch Bewegung einer geraden Linie entstanden und zugleich die kleinste zwischen gegebenen Grenzen sein kann, während es allerdings noch ganz andere Gleichungen zwischen x, y, z als die Gleichung der Schraubenfläche giebt, die zugleich den Gleichungen (1.), (44.) und (45.) Genüge leisten.

Zuletzt mag der Vortheil nicht unerwähnt bleiben, der für die Rechnung durch Einführung der Functionen α, β statt der in dem Integrale (4.) vorkommenden φa, ψb, erwachsen ist. Denn, während wir z. B. im gegenwärtigen Falle α und β nur constant zu setzen brauchten, um die Schraubenfläche zu erzeugen, mufs $\varphi a = \frac{i\cos na}{n}$, $\psi b = \frac{i\cos nb}{n}$ angenommen werden, um zu derselben Fläche zu gelangen.

Kiel, im Juli 1834.

11.

Wie sich die Division mit Zahlen erleichtern und zugleich sicherer ausführen läfst, als auf die gewöhnliche Weise.

Solches geschieht, wenn man an die Stelle der Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten in den Divisor, die bei dem gewöhnlichen Divisions-Verfahren nach und nach vom Dividenden abzuziehen sind, andere Producte in die Rechnung bringt, die, das Nemliche leistend, statt sie zu subtrahiren, addirt werden müssen; denn es ist, wie Rechnern bekannt, leichter, zwei Zahlen zu addiren, als sie von einander abzuziehen, und, eben weil dies leichter ist, ist das Resultat auch sicherer. Zu den an die Stelle der zu subtrahirenden Producte zu setzenden Addenden kann man die Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten in das Complement, oder den Unterschied des Divisors z. B. von derjenigen Potenz von 10 nehmen, die zunächst gröfser ist, als der Divisor. Diese Producte sind zu den Dividenden zu addiren, sobald man, nach geschehener Addition, jedesmal diejenige Ziffer des Quotienten selbst, welche der eine der Factoren des zu addirenden Products war, in der höchsten Stelle der Summe, wieder wegnimmt. Oder man kann auch, wenn die erste Ziffer des Divisors nicht 9 ist, zu den zu addirenden Producten diejenigen der einzelnen Ziffern des Quotienten in den Unterschied des Divisors von derjenigen Zahl nehmen, die, aus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 links, und übrigens aus lauter Nullen bestehend, zunächst gröfser ist, als der Divisor. Alsdann hat das Complement des Divisors immer wenigstens eine Ziffer weniger, als der Divisor, und man erspart also bei den einzelnen Producten noch an Rechnung. Da indessen alsdann, statt der blofsen Ziffern des Quotienten, ihre Producte in die eine geltende Ziffer des Complements, von der Summe, nach geschehener Addition, abgezogen werden müssen, so wird meistens das obige erste Verfahren besser sein.

Der Grund der beiden Verfahren erhellet, in Zeichen, sehr leicht. Es sei nemlich D der Divisor, m irgend eine Ziffer des Quotienten, n die Zahl der Ziffern des Divisors, S diejenige aus dem Dividenden hervorge-

gangene Zahl, von welcher, nach dem gewöhnlichen Verfahren, das Product mD abzuziehen ist, so, dafs das Resultat $S-mD$ erfolgt: so erhält man offenbar das nemliche Resultat, wenn man, statt mD von S abzuziehen, $m(10^n-D)-m.10^n$ zu S addirt; denn es ist

$$S+m(10^n-D)-m.10^n = S-mD.$$

Der Factor $m(10^n-D)$ ist aber nichts anders, als das Product der Ziffer m des Quotienten in das Complement oder den Unterschied 10^n-D des Divisors D von derjenigen Potenz 10^n von 10, die zunächst gröfser ist, als der Divisor; dagegen ist $m.10^n$ die Ziffer m des Quotienten selbst, an die correspondirende, höchste Stelle der Summe $S+m(10^n-D)$ gesetzt.

Ist $\mu.10^{n-1}$ die Zahl mit μ links und $n-1$ angehängten Nullen, so ist das Resultat das nemliche: ob man mD von S abzieht, oder ob man $m(\mu.10^{n-1}-D)-m\mu.10^{n-1}$ zu S addirt; denn es ist

$$S+m(\mu.10^{n-1}-D)-m\mu.10^{n-1} = S-mD,$$

und $m(\mu.10^{n-1}-D)$ ist nichts anders, als das Product der Ziffer m des Quotienten in das Complement oder den Unterschied $\mu.10^{n-1}-D$ des Divisors D von derjenigen Zahl $\mu.10^{n-1}$, mit μ links und angehängten Nullen, die zunächst gröfser ist, als D; dagegen ist $m\mu.10^{n-1}$ das Product der Ziffer m des Quotienten in die geltende Zahl μ des Complements, an die correspondirende Stelle der Summe $S+m(\mu.10^{n-1}-D)$ gesetzt.

Es ergeben sich also folgende Regeln, die, für die Ausübung, am besten an Beispielen werden sichtbar werden.

Erstes Verfahren. Es sei zum Beispiel 30087577019 durch 635041 zu dividiren, so verfährt man wie folgt:

$10^n = 1000000$		
Divisor $D =$ 635041	Dividend	Quotient
Complement $C =$ 364959	30087577019	47378

$+4C = +1459836$

$S+4.C-4.10^n = (4)4685937$

$+7C = +2554713$

$S+7C-7.10^n = (7)2406500$

$+3C = +1094877$

$S+3C-3.10^n = (3)5013771$

$+7C = +2554713$

$S+7C-7.10^n = (7)5684849$

$+8C = +2919672$

$S+8C-8.10^n = (8)604521$ Rest.

Man sucht nemlich die einzelnen Ziffern des Quotienten ganz auf die gewöhnliche Weise. Man sieht z. B. zu, wie oft der Divisor 635041 in 3008757 enthalten sein kann. Es ist 4 mal. Also ist die erste Ziffer des Quotienten 4. Nun multiplicirt man mit 4, nicht den Divisor 635041, sondern sein Complement $C = 364959$, welches 1459836 giebt. Dieses Product addirt man zu dem Dividenden 3008757, welches 44685937 giebt. Die vorderste Ziffer 4 der Summe (oben in Klammern geschlossen) ist nicht hinzuschreiben nöthig, weil sie immer nothwendig der von der Summe abzuziehenden Ziffer des Quotienten gleich sein mufs. Denn: wäre sie gröfser, so, dafs eine Ziffer in der höchsten Stelle stehen bliebe, so würde der neue Dividend, indem für die folgende Ziffer des Quotienten eine neue Ziffer des gegebenen Dividenden herunter gerückt wird, zwei Stellen mehr enthalten, als der Divisor, was nicht sein darf, und es würde alsdann die vorige Ziffer des Quotienten zu klein angenommen sein. Wäre sie kleiner, so würde die Ziffer des Quotienten nicht abgezogen werden können, und es wäre dann die letzte zu grofs angenommen. Man sieht nun ferner zu, wie oft der Divisor (nicht das Complement) in dem neuen Dividenden 4685937 enthalten sein kann, multiplicirt mit der gefundenen, zweiten Ziffer 7 des Quotienten das Complement (nicht den Divisor), addirt das Product zum Dividenden und verfährt wie vorhin; und so immer fort, bis zum Rest.

Noch ein Paar Beispiele, ohne weitere Erläuterungen, machen anschaulich, wie die Rechnung in der Ausübung aussehen würde.

Divisor 1043809	Dividend	Quotient
Compl. 8956191	19833439857578	19001023
	8956191	
	09395349	
	80605719	
	0001068857	
	8956191	
	002504857	
	17912382	
	04172398	
	26868573	
	1040971 Rest.	

Divisor. 899007	Dividend	Quotient
Compl. 100993	8900970316809	9900891

908937
8099073
908937
008010168
807944
8181120
908937
0900579
100993
1572 Rest.

Zweites Verfahren. Man nehme das obige erste Beispiel, so ist der Divisor 635041, $\mu.10^{n-1} = 700000$, also $\mu = 7$, und die Rechnung ist folgende:

$\mu.10^{n-1} = 700000$		
Divisor $D = 635041$	Dividend	Quotient
Compl. $C = 64959$	30087577019	47378

$+4C = +259836$

$S+4C-4\mu.10^{n-1} = (32-4.7=)\ 4{,}685937$
$+7C\ \ 454713$

$S+7C-7\mu.10^{n-1} = (51-7.7=)\ 2{,}406500$
$+3C\ \ 194877$

$S+3C-3\mu.10^{n-1} = (26-3.7=)\ \ 5{,}013771$
$+7C\ \ 454713$

$S+7C-7\mu.10^{n-1} = (54-7.7=)\ 5{,}684849$
$+8C\ \ 519672$

$S+8C-7\mu.10^{n-1} = (62-7.8=)\ \ 6{,}04521$ Rest.

Das Verfahren ist im Wesentlichen das Nemliche, wie das erste, blofs mit dem Unterschiede, dafs, nachdem die Vielfachen des Complements zum Dividenden addirt worden sind, von den höchsten Ziffern der Summen nicht die Ziffern des Quotienten selbst, sondern die Producte derselben in die geltende Ziffer μ der Summe des Complements und des Divisors, abgezogen werden müssen, was aber in der Ausübung füglich, auch ohne die höchsten Ziffern der Summen erst hinzuschreiben, geschehen kann. Geschieht dies, so stellen sich die beiden andern obigen Beispiele wie folgt:

$\mu = 2$		
Divisor 1043809	Dividend	Quotient
Compl. 956191	19833439857578	19001023

956191
9395349
8605719
001068857
956191
02504857
1912382
4172398
2868573
1040971 Rest.

$\mu = 9$		
Divisor 899008	Dividend	Quotient
Compl. 993	8900970316899	9900891

8937
8099073
8937
08010168
7944
8181120
8937
900579
993
1572 Rest.

Das zweite Verfahren erspart, wie schon oben bemerkt, Zahlen, indem das Complement nothwendig immer wenigstens eine Ziffer weniger hat, als der Divisor. Aber es ist, weil die einzelnen Ziffern des Quotienten nicht blofs, so, wie sie sind, von den einzelnen Summen abgezogen, oder viel mehr, da sie nothwendig die höchsten Ziffern der Summen selbst sind, nicht blofs in den Summen ausgelassen werden können, weniger einfach; also auch eben deshalb weniger sicher, und folglich weniger zu empfehlen, als das erste Verfahren. Gleich wohl wird selbst das zweite Verfahren, bei einigermafsen grofsen Divisoren, noch immer weniger nicht ganz mechanische Rechnung erfordern, als die gewöhnliche Art zu dividiren, und folglich immer noch leichter und sicherer sein, als diese.

Beide Verfahren ersparen insbesondere dann, wenn der Divisor nur wenig verschieden von einer Zahl mit angehängten Nullen ist, gegen die gewöhnliche Art zu dividiren, auch noch an Rechnung. Dies wird sich an Folgenden zwei, nach der gewöhnlichen und nach der gegenwärtigen Art, neben einander berechneten Beispielen zeigen.

Erstes Beispiel.

Gewöhnliche Art.

```
9997 | 375387085143 | 37549973
     | 29991
     |-------
     |  75477
     |  69979
     |-------
     |  54980
     |  49985
     |-------
     |  49958
     |  39988
     |-------
     |  99705
     |  89973
     |-------
     |  97321
     |  89973
     |-------
     |  73484
     |  69979
     |-------
     |  35053
     |  29991
     |-------
     |   5062
```

Gegenwärtiges erstes Verfahren.

```
9997 | 375387085143 | 37549973
   3 |      9       |
     |--------------|
     |   75477      |
     |     21       |
     |--------------|
     |   54980      |
     |     15       |
     |--------------|
     |   49958      |
     |     12       |
     |--------------|
     |   99705      |
     |     27       |
     |--------------|
     |   97321      |
     |     27       |
     |--------------|
     |   73484      |
     |     21       |
     |--------------|
     |   35053      |
     |      9       |
     |--------------|
     |    5062      |
```

Da bei dem gegenwärtigen Verfahren, in diesem Falle, die zu addirenden Producte so klein sind, so brauchten sie sogar nicht einmal erst ausgeschrieben zu werden, sondern konnten füglich ohne Weiteres zu den Dividenden hinzugethan werden. Dann reducirte sich die Rechnung sogar blofs auf Folgendes:

```
9997 | 375387085143 | 37549973
   3 |  75477       |
     |    54980     |
     |      49958   |
     |        99705 |
     |          97321
     |            73484
     |              35053
     |              ------
     |               5062
```

Hier ist, wie man sieht, bedeutend weniger Rechnung nöthig, als nach der gewöhnlichen Art.

Zweites Beispiel.

Gewöhnliche Art.

```
3994 | 507907159732 | 127167541
       3994
       -----
       10850
        7988
       -----
        28627
        27958
        -----
         6691
         3994
         -----
         26975
         23964
         -----
          30119
          27958
          -----
           21617
           19970
           -----
            16473
            15976
            -----
             4972
             3994
             ----
              978
```

Gegenwärtige zweite Art.

```
4
3994 | 507907159732 | 127167541
   6 |    6         |
       -----
       10850
          12
       -----
        28627
           42
        -----
         6691
            6
        -----
         26975
            36
        -----
          30119
             42
          -----
           21617
              30
           -----
            16473
               24
            -----
             4972
                6
             ----
              978
```

oder abgekürzt, nemlich, ohne die zu addirenden Producte hinzuzuschreiben:

```
4
3994 | 507907159732 | 127167541
   6 | 10850        |
        28627
          6691
          26975
           30119
            21617
             16473
              4972
               978
```

Auch hier ist, wie man sieht, weniger Rechnung nöthig, als bei dem gewöhnlichen Divisions-Verfahren.

Es verbindet sich auch noch mit den beiden hier empfohlenen Divisions-Verfahren ein zweiter Vortheil, nemlich der, einer leichten Probe, die,

in dem Falle, wenn die Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten in das Complement des Divisors fehlerfrei sind, also dann, wenn sie entweder aus einer Tafel der 1, 2, 3, ..., 9fachen der Zahlen genommen werden konnten, oder, wenn sie vorher durch Addition berechnet wurden, schon eine bedeutende Sicherheit gewährt. Um diese Probe zu rechnen, ist nichts weiter nöthig, als, nach geschehener Division, den Dividenden, nebst sämmtlichen Producten der einzelnen Ziffern des Quotienten in das Complement, noch einmal abzuschreiben, und Alles zusammen zu rechnen. Die Summe wird, wenn die Division richtig gerechnet war, bei dem ersten Verfahren, mit dem Quotienten, mit angehängtem Reste, und bei dem zweiten Verfahren mit dem Producte des Quotienten in die geltende Ziffer μ der Zahl, zu welcher das Complement des Divisors genommen worden, nebst dem Reste, der sich, bis auf höchstens seine oberste Ziffer, angehängt zeigen wird, übereinstimmen. Denn es werde, wie oben, der Divisor durch D, der Dividend durch S, das Complement durch C, ferner der Quotient durch Q und der Rest durch R bezeichnet, so soll, der Division gemäfs, sein:

$$S = Q.D + R.$$

Es wird aber, für beide Verfahren passend, das Complement durch

$$C = \mu.10^{n-1} - D$$

ausgedrückt (für das erste Verfahren ist blofs $\mu = 10$ zu setzen). Also ist

$$D = \mu.10^{n-1} - C,$$

und folglich, vermöge des obigen Ausdrucks von S:

$$S = Q(\mu.10^{n-1} - C) + R.$$

Daraus folgt

$$S + QC = \mu.10^{n-1}.Q + R.$$

Es ist aber QC nichts anders als die Summe der Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten Q in das Complement C; und folglich ist diese Summe, zusammen mit dem Dividenden S, nemlich $S + QC$, gleich $\mu.10^{n-1}Q + R$, das heifst, gleich dem Producte des Quotienten Q in die geltende Ziffer μ der Summe des Complements und des Divisors $+R$. Aber der Rest R kann nicht mehr denn höchstens so viel Stellen haben, als der Divisor; folglich nicht mehr als höchstens n Stellen. Das Product $\mu.10^{n-1}Q$ aber hat rechterhand jedenfalls wenigstens $n-1$ Nullen. Also wird sich der Rest, höchstens seine oberste Ziffer ausgenommen, angehängt zeigen. Ist $\mu = 10$, wie in dem ersten Verfahren, so ist

das Product $\mu.10^{n-1}Q = 10^n.Q$. Es hat also dann rechterhand wenigstens n Nullen, und foglich wird in diesem Falle der Rest ganz blofs angehängt sich zeigen.

Für ein Paar der obigen Beispiele sind die Proben folgende.

Erstes Beispiel, nach der ersten Art.

Dividend $S = 30087577019$

Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten in das Complement, oder QC.

$$\begin{array}{r} 1459836 \\ 2554713 \\ 1094877 \\ 2554713 \\ 2919672 \end{array}$$

$S + QC = 47378{,}604521$, gleich dem Quotienten, wie man sieht, mit angehängtem Reste.

Viertes Beispiel, nach der zweiten Art.

Dividend $S = 30087577019$

Producte der einzelnen Ziffern des Quotienten in das Complement, oder QC.

$$\begin{array}{r} 259836 \\ 454713 \\ 194877 \\ 454713 \\ 519672 \end{array}$$

$S + QC = 33165204521$

Quotient $Q = 47278$

$\mu.10^{n-1} = 700000$

$\mu.10^{n-1}.Q = 33164600000$

Rest $R = 604521$

$\mu.10^{n-1}Q + R = 33165204521$ = dem obigen $S + QC$.

Eine Probe ist diese Zusammenrechnung deshalb, weil sie erstlich angiebt, dafs bei den einzelnen Additionen, wie auch sonst, keine andern Fehler, als solche, die sich zufällig aufheben, was, wie immer, sehr unwahrscheinlich ist, vorgekommen sein können; und zweitens, dafs auch keine Ziffer im Quotienten und im Reste, anders, als einen andern Fehler aufhebend, verschrieben sein kann, indem beide, Quotient und Rest, in der Summe vorkommen. Es können nicht wohl andere Fehler Statt finden, als bei der Ausrechnung der einzelnen Producte; und dafs diese richtig sind, wird vorausgesetzt. Weichen in der Summe Ziffern von

denen des Quotienten und Restes ab, so zeigen ihre Stellen sogleich an, wo ein Additions-Fehler Statt gefunden haben könne.

Verfasser dieses rechnet beim Dividiren, seit er auf das hier Vorgetragene gekommen ist, immer nach einer der beiden beschriebenen Arten, besonders nach der ersten, und hat dieselben, in Rücksicht auf Leichtigkeit und Sicherheit, vortheilhaft befunden. In der Meinung nun, vielleicht auch Andere zu veranlassen, sich dieses Vortheils zu bedienen, und wegen der sehr grofsen Menge der Fälle, in welchen solche elementaren Dinge Nutzen gewähren können, hat er geglaubt, die Beschreibung der Verfahren hier mittheilen zu dürfen.

12.

Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

I.

Dans son bel ouvrage sur la *Théorie de la chaleur*, *Fourier* a donné, comme on sait, une formule propre à exprimer une fonction $f(x)$, pour toutes les valeurs réelles de x, comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, laquelle est renfermée dans l'équation suivante:

$$(A.) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{0}^{\infty} dp \cos p(x-\alpha)$$

dont on possède plusieurs démonstration. Comme la variable p n'entre dans cette équation que sous un cosinus dont la valeur est indépendante du signe de p, il en résulte qu'on peut prendre l'intégrale relative à cette variable depuis $p=-\infty$ jusqu'à $p=+\infty$, pourvu qu'on divise l'intégrale double par 2π et non plus seulement par π, c'est-à-dire qu'on a également:

$$(B.) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp \cos p(x-\alpha),$$

Dans les applications, on emploie à volonté ou cette équation ou la précédente.

Si l'on différencie la première par rapport à x un nombre i de fois, on en déduit:

$$\frac{d^i f(x)}{dx^i} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{0}^{\infty} dp.p^i.\cos\left(px-p\alpha+\frac{i\pi}{2}\right);$$

et il vient, en opérant semblablement sur la seconde:

$$\frac{d^i f(x)}{dx^i} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp.p^i.\cos\left(px-p\alpha+\frac{i\pi}{2}\right).$$

Or ces deux égalités remarquables, qui subsisteraient encore si l'on changeait i en $-i$, et si l'on transformait en même temps les différentielles à indices negatifs en intégrales multiples, contenant, dans leurs seconds membres, i comme une quantitté et non comme un indice, il est naturel d'examiner jusqu'à quel point elles restent exactes, lorsque i cesse d'être

un nombre entier. Observons en effet que, par la manière dont on les a obtenues, elles ne semblent avoir de sens qu'autant que i est un nombre entier, positif ou négatif; et que rien n'autorise à les étendre sans démonstration au cas des dérivées à indices fractionnaires dont nous avons essayé de donner une définition complète et générale dans le 21ième cahier du *journal de l'Ecole polytechnique*. Il y a plus: on peut affirmer qu'elles ne sauraient avoir lieu toutes deux à la fois et dans leur entière généralité; car si l'on pose par exemple $i = \frac{1}{2}$, la première fournit pour la différentielle $d^{\frac{1}{2}}f(x)$ une valeur réelle, puisque tous les éléments de la quadrature double sont réels, tandis que la seconde donne une expression imaginaire de cette même dérivée, à cause des valeurs négatives de p, qui rend $\sqrt{p}$ imaginaire. C'est donc se proposer un problême interessant que de chercher quand et de quelle manière la formule de *Fourier* peut servir à transformer, en intégrales définies doubles, les dérivées à indices quelconques. Il ne faut pas oublier que nos recherches sont fondées essentiellement sur la définition des différentielles à indices quelconques dont nous avons fait usage dans le cahier du *journal de l'Ecole polytechnique* cité plus haut. Les personnes, qui adopteraient une autre définition que la nôtre, pourraient évidemment ne pas admettre les conséquences que nous tirons de nos principes.

II.

Fourier, nous devons le dire, avait indiqué, dès l'origine, les applications de sa formule à la théorie des différentielles fractionnaires: et même il semble avoir voulu en déduire une définition générale de ces différentielles. Le point de vue sous lequel il les a envisagées étant très différent du nôtre, on nous saura gré de citer les propres paroles de cet illustre Géomètre.

Après avoir démontré dans le Chapite IX. de la théorie de la chaleur (page 561) la formule:

$$(B.) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp \cos(px - p\alpha).$$

Fourier ajoute les réflexions suivantes qui forment, je crois, le seul article où il ait considéré les différentielles à indices quelconques.

„Nous ferons aussi remarquer que l'on peut déduire de l'équation „$(B.)$ une expression très simple du coëfficient différentiel de l'ordre in- „défini $\frac{d^i f(x)}{dx^i}$ ou de l'intégrale $\int^i dx^i f(x)$.

„L'expression cherchée est une certaine fonction de x et de l'in-„dice i. Il s'agit de faire connaître cette fonction sous une forme telle „que le nombre i n'y entre point comme un indice, mais comme une „quantité, afin de comprendre dans une même formule tous les cas où „l'on attribue à i des valeurs positives ou negatives quelconques. Pour „y parvenir, nous remarquerons que l'expression

$$\cos\left(r+\frac{i\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \cos r\cos\frac{i\pi}{2}-\sin r\sin\frac{i\pi}{2},$$

„devient successivement:

$$-\sin r,\quad -\cos r,\quad +\sin r,\quad +\cos r,\quad -\sin r,\quad \ldots.$$

„si les valeurs respectives de i sont 1, 2, 3, 4, 5, ... Les mêmes ré-„sultats reviennent dans le même ordre lorsque l'on augmente la valeur „de i. Il faut maintenant, dans le second membre de l'équation:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}dp\cos(px-p\alpha),$$

„écrire le facteur p^i au devant du signe cosinus, et ajouter sous ce terme „$\frac{i\pi}{2}$. On aura ainsi:

$$\frac{d^if(x)}{dx^i}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}dp.p^i.\cos\left(px-p\alpha+\frac{i\pi}{2}\right).$$

„Le nombre i, qui entre dans le second membre, sera régardé comme „une quantité quelconque, positive ou négative. Nous n'insisteront pas „sur ces applications à l'analyse générale."

Nous avons du rapporter ce passage, qui est très interessant, soit par l'importance de la question à laquelle il s'applique, soit par le nom de l'auteur. Il est d'ailleurs presque inutile de dire que les resultats final ne s'accorde point avec notre définition des dérivées à indices quelconques. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, d'après la formule donnée par *Fourier*, les dérivées à indice $\frac{1}{2}$ d'une fonction réelle seraient toujours imaginaires, tandis que, dans nos idées, il y a une foule de fonctions pour lesquelles ces dérivées sont réelles. Aussi l'équation:

$$\frac{d^if(x)}{dx^i}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha f(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}dp.p^i.\cos\left(px-p\alpha+\frac{i\pi}{2}\right)$$

doit-elle être régardée comme une définition des différentielles à indices quelconques, différente de la notre, et proposée implicitement dans le passage de *Fourier*. Nous croyons qu'on pourrait élever contre cette définition plus d'une objection solide. Et d'abord il parait qu'on aurait pu

tout aussi bien, comme nous l'avons indiqué plus haut, prendre pour limites de l'intégrale relative à p, o et ∞ au lieu de $-\infty$ et $+\infty$. On aurait été conduit par ce changement à une autre formule très différente de la première et souvent même contradictoire avec elle, ainsi qu'on l'a vu. Or comme rien, *à priori*, ne porte à préférer l'une de ces formules à l'autre, il semble qu'il reste quelque chose de vague dans cette manière de procèder. Mais une discussion plus longue sur ce sujet serait superflue. Rentrons donc dans les principes de nos premiers mémoires et voyons qu'elles conséquences on peut en déduire.

III.

Mais, pour plus de généralité, au lieu de faire usage des formules (*A.*), (*B.*), nous en employerons deux autres que l'on trouve également démontrées dans la *Théorie analytique de la chaleur*. La première de ces formules, savoir:

$$1. \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\int_{0}^{\infty} dp \cos p(x-\alpha),$$

où K désigne un nombre réel pris à volonté, sert à représenter une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $-K$ et $+\infty$, en sorte que le second membre de l'équation (1.) est égal à $f(x)$ quand on a $x+K>0$, et égal à zéro quand on a $x+K<0$. La seconde est comprise dans l'égalité:

$$2. \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} dx f(\alpha)\int_{0}^{\infty} dp \cos p(x-\alpha).$$

Elle représente la fonction $f(x)$, entre les limites $-\infty$ et $+K$; et son second membre est constamment nul, quand x est $>K$.

On peut déduire des équations (1.) et (2.) deux autres équations particulières qu'il est bon de faire connaître. Pour cela soit m un nombre réel et positif, ou du moins un nombre de la forme $m=a+b\sqrt{-1}$, a étant >0. Dans l'équation (1.) posons $f(x)=e^{-mx}$; et dans l'équation (2.), posons $f(x)=e^{mx}$. Il nous viendra:

$$e^{-mx} = \frac{1}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha\, e^{-m\alpha}\int_{0}^{\infty} dp \cos p(x-\alpha)$$

et

$$e^{mx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha}\int_{0}^{\infty} dp \cos p(x-\alpha).$$

Ces deux égalités peuvent être vérifiées de la manière suivante.

Considérons, pour fixer les idées, la dernière de ces formules; et désignons son second membre par z. Il s'agit de prouver que, pour toute valeur de x inférieure à K, on a $z = e^{mx}$. Effectuant d'abord l'intégration relative à α, nous aurons:

$$z = \frac{e^{mK}}{\pi}\int_0^\infty dp\,.\,\frac{m\cos p(K-x)+p\sin p(K-x)}{m^2+p^2}.$$

L'intégration définie, relative à p, peut aussi être effectuée; et à cause de $K-x>0$, on a par les formules connues:

$$\int_0^\infty \frac{m\cos p(K-x)\,dp}{m^2+p^2} = \frac{\pi}{2}e^{m(x-K)}, \quad \int_0^\infty \frac{p\sin p(K-x)\,dp}{m^2+p^2} = \frac{\pi}{2}e^{m(x-K)},$$

d'où résulte: $z = e^{-x}$; comme on voulait le démontrer. Ceci suppose $x<K$. Pour des valeurs de x supérieures à K, la différence $K-x$ étant négative, on aurait au contraire:

$$\int_0^\infty \frac{m\cos p(K-x)\,dp}{m^2+p^2} = \frac{\pi}{2}e^{m(K-x)}, \quad \int_0^\infty \frac{p\sin(K-x)\,dp}{m^2+p^2} = -\frac{\pi}{2}e^{m(K-x)},$$

et il en résulterait $z = 0$. On démontrerait de la même manière la formule qui donne la valeur de e^{-mx} entre les limites $-K$ et $+\infty$. Telles sont avec les équations (1.) et (2.) les formules fondamentales auxquelles nous allons appliquer nos raisonnements.

IV.

Enfin il reste à donner l'énoncé d'un théorême principal sur lequel nous allons nous appuyer, savoir l'énoncé du théorême relatif à la manière de former les dérivées fractionnaires par le secours de certaines expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ *). Ce théorême consiste en deux règles que voici.

1°. Si la fonction $f(x)$ est telle que son développement exponentiel $\Sigma A_m e^{mx}$ ne contienne que des exposants m de la forme $a+b\sqrt{-1}$ (a étant >0), la dérivée $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ sera la vraie valeur que prendra la fraction:

$$P_h = \frac{1}{h^\mu}\left(f(x)-\frac{\mu}{1}f(x-h)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}f(x-2h)-\text{etc.}\right)$$

quand on réduira à zéro la quantité positive h.

2°. Si la fonction $f(x)$ est telle que son développement exponentiel $\Sigma A_m e^{mx}$ ne contienne que des exposants de la forme $-a+b\sqrt{-1}$, ou dont la partie réelle soit négative, la derivée $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ sera la vraie va-

*) *Journal de l'Ecole polytechnique, 21ième cahier, page* 107.

leur que prendra la fraction:

$$P_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(f(x) - \frac{\mu}{1} f(x+h) + h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} f(x+2h) - \text{etc.}\right),$$

quand on reduira à zéro la quantité positive h.

Les démonstrations de ces deux règles sont si aisées à trouver que je ne crois pas devoir les répéter ici. Elles consistent à remplacer partout les fonctions par leurs développements exponentiels, à sommer ensuite les séries convergentes qui se trouvent sous le signe Σ, et à poser enfin $h = 0$ dans l'expression finie qui résulte de cette sommation.

V.

Maintenant, pour montrer comment nos théorèmes conduisent à exprimer en intégrales doubles les dérivées à indices quelconques, prenons un exemple simple, et cherchons les dérivées de l'exponentielle e^{mx}, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et le nombre indéterminé K. Pour arriver a ce but, partons de l'équation:

$$e^{mx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp \cos p(x-\alpha),$$

qui a été démontrée tout à l'heure, la partie réelle de m étant >0.

Cette équation subsistant toutes les fois que x prend une valeur réelle $<K$, il est évident qu'on peut y changer x en $x-h$, en $x-2h$, en $x-3h$, etc., pourvu que h soit >0. Ainsi on aura:

$$e^{m(x-h)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp \cos p(x-h-\alpha),$$

$$e^{m(x-2h)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp \cos p(x-2h-\alpha),$$

$$e^{m(x-3h)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp \cos p(x-3h-\alpha),$$

. . . . . .

Si l'on multiplie ces équations (en commençant à celle qui contient dans son premier membre e^{mx}) respectivement par:

$$\frac{1}{h^\mu},\quad -\frac{1}{h^\mu}\cdot\frac{\mu}{1},\quad \frac{1}{h^\mu}\cdot\frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\quad \frac{1}{h^\mu}\cdot\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},\ \text{etc.},$$

puis qu'on les ajoute, il est clair qu'on formera d'une part la fonotion:

$$P_h = \frac{1}{h^\mu}\left(e^{mx} - \frac{\mu}{1} e^{m(x-h)} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} e^{m(x-2h)} - \text{etc.}\right),$$

dont la valeur P_0, poùr $h = 0$, sera $\frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu}$, et d'autre part l'intégrale double

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha e^{m\alpha}\int_0^{\infty} dp\,.\,Q_h,$$

Q_h représentant la fraction:

$$\frac{1}{h^\mu}\left(\cos p(x-\alpha)-\frac{\mu}{1}\cos p(x-h-\alpha)+\frac{\mu(\mu-1)}{1}\cos p(x-2h-\alpha)-\text{ etc.}\right).$$

La série qui représente la valeur de Q_h n'est ni convergente, ni divergente; et pour qu'elle acquierre un sens précis, il faut multiplier ses divers termes par les puissances successives d'une quantité infiniment peu différente de l'unité *). Cette opération effectuée, on met aisément la valeur de Q_h sous forme finie, et en désignant par Q_0 la valeur particulière qui répond à $h=0$, on obtient $Q_0=p^\mu\cos\left(px-p\alpha+\frac{\mu\pi}{2}\right)$.

Or l'égalité:

$$P_h=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha e^{m\alpha}\int_0^{\infty} dp\,Q_h,$$

que nous venons de démontrer, et qui subsiste quelle que soit la quantité positive h, devenant, par l'hypothèse $h=0$:

$$P_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha e^{m\alpha}\int_0^{\infty} dp\,Q_0,$$

donne, quand on y remplace P_0 et Q_0 par leurs valeurs, l'équation suivante:

$$\frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha}\int_0^{\infty} dp\,.\,p^\mu.\cos\left(px-p\alpha+\frac{\mu\pi}{2}\right),$$

équation à laquelle nous voulions parvenir, et qui nous fait connaître une intégrale double équivalente à la dérivée $\frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu}$.

En second lieu cherchons la dérivée à indice μ de e^{-mx}, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-K$ et $+\infty$. Nous avons entre ces limites:

$$e^{-mx}=\frac{1}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha\, e^{-m\alpha}\int_0^{\infty} dp\cos p(x-\alpha).$$

Soit h une quantité infiniment petite et positive, on pourra, dans l'égalité que je viens d'écrire, remplacer x par $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, etc. Si donc on pose:

$$P_h=\frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(e^{-mx}-\frac{\mu}{1}e^{-m(x+h)}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}e^{-m(x+2h)}-\text{etc.}\right),$$

et

$$Q_h=\frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(\cos p(x-\alpha)-\frac{\mu}{1}\cos p(x+h-\alpha)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos(x+h-\alpha)-\text{etc.}\right),$$

*) *Journal de l'Ecole polytechnique*, 19ième *cahier, page* 408.

on aura:

$$P_h = \frac{1}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha\, e^{-m\alpha}\int_0^{\infty} Q_h\, dp;$$

puis, en faisant $h = 0$, cette égalité deviendra:

$$P_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha\, e^{-m\alpha}\int_0^{\infty} Q_0\, dp.$$

Or on a $P_0 = \frac{d^\mu e^{-mx}}{dx^\mu}$: de plus on trouve aisément:

$$Q_0 = (-1)^\mu p^\mu \cos\left(px - p\alpha - \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Mettant donc au lieu de P_0, Q_0, leurs valeurs, j'obtiens:

$$\frac{d^\mu e^{-mx}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha\, e^{-m\alpha}\int_0^{\infty} dp\,.\,p^\mu.\cos\left(px - p\alpha - \frac{\mu\pi}{2}\right),$$

formule très différente de celle qui donne $\frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu}$ et qui ne s'en déduirait nullement en y changeant m en $-m$.

VI.

Les valeurs que nous venons de trouver pour les dérivées des fonctions exponentielles e^{mx}, e^{-mx} s'étendent aisément à des fonctions plus générales. Pour fixer les idées, considérons une fonction formée par la somme de plusieurs exponentielles à exposants positifs, ou plutôt une fonction dont le développement soit de la forme $\Sigma A_m e^{mx}$, m étant $= a + b\sqrt{-1}$, et a étant > 0. Admettons en outre que cette fonction ne devienne infinie pour aucune valeur de x inférieure à K. Alors elle pourra s'exprimer, d'après le théorème de *Fourier*, par une intégrale double, pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre $-\infty$ et $+K$; et en la représentant par $f(x)$, on aura:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, f(\alpha)\int_0^{\infty} dp\, \cos p(x-\alpha).$$

Comme cette équation subsiste en y changeant x en $x-h$, en $x-2h$, en $x-3h$, etc., pourvu que h soit > 0, il est clair que si l'on pose:

$$P_h = \frac{1}{h^\mu}\left(f(x) - \frac{\mu}{1} f(x-h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} f(x-2h) - \text{etc.}\right),$$

et

$$Q_h = \frac{1}{h^\mu}\left(\cos p(x-\alpha) - \frac{\mu}{2}\cos(x-h-\alpha) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos p(x-2h-\alpha) - \text{etc.}\right),$$

on trouvera:

$$P_h = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, f(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} Q_h\, dp.$$

A présent, si l'on fait $h = 0$, on aura:

$$P_0 = \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}, \qquad Q_0 = p^\mu \cos\left(px - p\alpha + \frac{\mu\pi}{2}\right):$$

de plus il viendra:

$$P_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha f(\alpha) \int_0^\infty Q_0\, dp.$$

Donc on obtient:

$$\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha f(\alpha) \int_0^\infty dp.p^\mu.\cos\left(px - p\alpha + \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

On pourrait démontrer cette dernière formule, en partant de l'égalité:

$$\frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp.p^\mu.\cos\left(px - p\alpha + \frac{\mu\pi}{2}\right);$$

car, si on la multiplie par A_m, puis si l'on indique par le signe Σ une somme qui s'étende à toutes les valeurs que prennent m et A_m dans la fonction $f(x) = \Sigma A_m e^{mx}$, il en résultera:

$$\Sigma A_m \frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu} = \Sigma \frac{A_m}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha\, e^{m\alpha} \int_0^\infty dp.p^\mu.\cos\left(px - p\alpha + \frac{\mu\pi}{2}\right),$$

ce qui revient au fond à l'équation écrite tout à l'heure, parceque d'une part on a:

$$\Sigma A_m \frac{d^\mu e^{mx}}{dx^\mu} = \Sigma A_m e^{mx} m^\mu = \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu},$$

et que, d'autre part, on peut placer, dans le second membre, le signe Σ après le signe $\int$ relatif à la variable α, et substituer ensuite $f(\alpha)$ au lieu de $\Sigma A_m e^{m\alpha}$.

Si l'on considérait au contraire une fonction $f(x)$ dont la valeur fut représenté, entre les limites $-K$ et $+\infty$, par un développement de la forme $\Sigma A_m e^{-mx}$ (m étant $= a + b\sqrt{-1}$ et $a > 0$) on trouverait par une semblable analyse:

$$\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu}{\pi}\int_{-K}^{+\infty} d\alpha f(\alpha) \int_0^\infty dp.p^\mu.\cos\left(px - p\alpha - \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Enfin si le développement de la fonction $f(x)$ était composé à la fois d'exponentielles de la forme e^{mx} et d'exponentielles de la forme e^{-mx}, on partagerait cette fonction en deux parties distinctes que l'on traiterait séparément par les principes convenables à leur nature.

Je terminerai ce paragraphe par trois observations utiles.

1°. L'équation:

$$\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+K} d\alpha f(\alpha) \int_0^\infty dp.p^\mu.\cos\left(px - p\alpha + \frac{\mu\pi}{2}\right),$$

et toutes les équations semblables que l'on rencontre dans ce mémoire,

renferment implicitement, dans leur premier membre, une *fonction complémentaire* dont on ne pourrait faire abstraction sans détruire leur généralité, et qui doit être déterminée, dans chaque cas, par les données particulières du problême *).

2°. Ces équations peuvent servir à deux usages différents; car elles donnent, soit le moyen de transformer en intégrales définies doubles les différentielles à indices quelconques, soit réciproquement le moyen de calculer les valeurs de ces intégrales doubles, quand celles des différentielles sont connues, ce qui arrive en certains cas particuliers.

3°. Les principes qui m'ont guidé dans toutes ces recherches, reposent sur les Théorêmes rappelés au No. IV. et démontrés dans le Journal de l'Ecole polytechnique; mais ces théorêmes ne conduiraient plus à aucun résultat, s'il s'agissait d'introduire, dans le calcul des différentielles à indices quelconques, les formules par lesquelles on représente une fonction $f(x)$, en série de cosinus, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites finies a, b. Ce n'est pas que l'emploi de ces formules (utiles à toutes les parties de l'analyse) doive être banni du nouveau calcul; mais les difficultés, que cet emploi présente, méritent d'être levées; et de la nait une question très digne de l'attention des Géomètres.

VII.

L'analyse employée dans ce Mémoire, analyse dont l'idée première se trouve indiquée, depuis long-temps, dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, n'est pas sans utilité dans cette branche du calcul intégral, qui a pour objet la détermination des quadratures définies. Elle donne naissance à une certaine méthode que nous ferons connaître en peu de mots, et dont on multiplierait aisément les applications.

Soient $F(x)$, $\varphi(\alpha, x)$ deux fonctions de x dont les développements en séries exponentielles ne renferment que des exposants réels négatifs, ou des exposants imaginaires dont la partie réelle soit négative. Si les quantités a, b sont indépendantes de x, et si en désignant par K un nombre réel connu, on a entre les limites $x = K$, $x = \infty$, l'équation:

$$\int_a^b \varphi(\alpha, x)\, d\alpha = F(x),$$

*) Voyez le 21ème cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*; et mon Mémoire sur le Théorème des fonctions complémentaires, inséré dans le Tome XI. du *Journal de Mr. Crelle.*

je dis qu'on aura aussi entre ces limites:

$$\int_a^b \frac{d^\mu \varphi(\alpha, x)}{dx^\mu} d\alpha = \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu}.$$

Pour démontrer ce théorême, il faut observer que, d'après nos hypothèses, l'équation:

$$\int_a^b \varphi(\alpha, x) d\alpha = F(x),$$

subsiste si, en désignant par h une quantité positive, on change x en $x+h$, en $x+2h$, en $x+3h$, etc. D'après cela, si l'on pose:

$$P_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(F(x) - \frac{\mu}{1}F(x+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}F(x+2h) - \text{etc.}\right),$$

et:

$$Q_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(\varphi(\alpha, x) - \frac{\mu}{1}\varphi(\alpha, x+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\varphi(\alpha, x+2h) - \text{etc.}\right),$$

on trouvera sans difficulté:

$$\int_a^b Q_h . d\alpha = P_h,$$

égalité qui, en posant $h = 0$, devient:

$$\int_a^b Q_0 d\alpha = P_0,$$

et d'où l'on déduit immédiatement:

$$\int_a^b \frac{d^\mu \varphi(\alpha, x)}{dx^\mu} d\alpha = \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu},$$

si l'on observe que $Q_0 = \frac{d^\mu \varphi(\alpha, x)}{dx^\mu}$ et que $P_0 = \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu}$.

Voici quelques applications de ce Théorême. En désignant par x une quantité positive et par e la base de logarithmes népériens, on a, quelle que soit la constante q, l'égalité connue:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos q\alpha \, d\alpha = \frac{x}{x^2+q^2}.$$

D'après le Théorême que nous venons de démontrer, on peut différencier à indices quelconques, par rapport à x, les deux membres de cette égalité. Si donc on effectue cette différenciation par rapport à un indice $\mu-1$, en se rappelant les formules données dans le 21ème cahier du *journal de l'Ecole polytechnique*, pour différencier les fractions rationnelles, on trouvera:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} . \alpha^{\mu-1} . \cos q\alpha . d\alpha = \frac{\Gamma(\mu)\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x}\right)}{(q^2+x^2)^{\frac{\mu}{2}}} + \psi,$$

$\Gamma(\mu)$ représentant, d'après la notation de ***Legendre***, l'intégrale eulérienne de seconde espèce, et ψ designant une fonction complémentaire de la forme:

$$\psi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Si, pour plus de simplicité, on suppose $\mu > 0$, on voit que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu-1} \cos q\alpha \, d\alpha$ devient infiniment petite quand la quantité x prend une valeur positive infiniment grande: en effet, si l'on pose $\alpha x = \theta$, l'intégrale dont nous parlons se transforme dans celle-ci:

$$\frac{\int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{\mu-1} \cos \frac{q\theta}{x} \, d\theta}{x^\mu},$$

laquelle évidemment a une valeurs plus petite que

$$\frac{\int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{\mu-1} \, d\theta}{x^\mu};$$

or cette dernière expression se réduisant à zéro, quand $x = \infty$, il en est de même *à fortiori* de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} . \alpha^{\mu-1} . \cos q\alpha . d\alpha.$$

Le second membre de notre équation, qui exprime la valeur de cette intégrale, doit dont aussi s'évanouir quand $x = \infty$, ce qui exige qu'on ait $\psi = 0$. Par conséquent il reste simplement:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} . \alpha^{\mu-1} \cos q\alpha . d\alpha = \frac{\Gamma(\mu) \cos\left(\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x}\right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{\mu}{2}}};$$

ce qui coïncide au fond avec les résultats qu'*Euler* a obtenus par induction, et que Mr. *Poisson* a rigoureusement établis en suivant une marche moins directe que la nôtre.

En opérant d'une manière analogue sur l'intégrale définie:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin q\alpha \, d\alpha = \frac{q}{q^2 + x^2},$$

on trouverait la formule:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} . \alpha^{\mu-1} . \sin q\alpha . d\alpha = \frac{\Gamma(\mu) \sin\left(\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x}\right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{\mu}{2}}},$$

qui a été donnée aussi par ***Euler***.

En désignant par x un nombre positif quelconque, on a, comme il est aisé de le voir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} \, d\alpha}{x + \alpha\sqrt{-1}} = 4 \int_0^\infty \frac{x \cos \alpha \, d\alpha}{x^2 + \alpha^2} = 2\pi e^{-x}.$$

Si donc on prend la différentielle à indice $\mu-1$ des deux membres, conformément au théorême de ce No., il viendra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\,d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^{\mu}} = \frac{2\pi e^{-x}}{\Gamma(\mu)} + \psi,$$

ψ désignant une fonction complémentaire de la forme:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Cette fonction complémentaire doit être prise égale à zéro, si l'on suppose μ positif; car dans cette hypothèse, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\,d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^{\mu}},$$

devient nulle pour $x=\infty$ tout aussi bien que l'exponentielle e^{-x}. Il reste donc simplement:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\,d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^{\mu}} = \frac{2\pi e^{-x}}{\Gamma(\mu)}$$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus par d'autres Géomètres *).

En intégrant la quantité $\frac{d\alpha}{x^2+\alpha^2}$ entre les limites 0 et ∞, on trouve sans difficulté l'équation suivante:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2x},$$

dans laquelle x désigne un nombre positif quelconque. Prenant maintenant la différentielle à indice $\mu-1$ des deux membres et supposant $\mu>0$, nous obtiendrons, tout calcul fait:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{x}\right) d\alpha}{\alpha(x^2+\alpha^2)^{\frac{\mu}{2}}} = \frac{\pi}{2x^{\mu}}.$$

On n'a pas ajouté, dans le second membre, de fonction complémentaire, parcequ'en supposant μ positif, les deux membres de l'équation que nous venons d'écrire deviennent nuls lorsque x devient infini, ce qui exige que la fonction complémentaire soit égale à zéro. A présent, pour donner à notre intégrale une forme plus élégante, substituons à la variable α une autre variable θ liée à la première par la relation: $\operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{x} = \theta$. Nous déduirons de cette relation: $\alpha = x \operatorname{tang}\theta$, $d\alpha = \frac{x\,d\theta}{\cos^2\theta}$: en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, la lettre x diparaître d'elle-même, et

*) Voyez la *Théorie analytique des Probabilitis* de *Laplace*, page 134; et le 19ème cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*, page 480.

nous tomberons sur un résultat assez remarquable que voici:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \mu\theta}{\sin\theta} \cos^{\mu-1}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

L'égalité à laquelle nous sommes parvenus suppose $\mu > 0$: elle se vérifie immédiatement pour les valeurs entières de μ telles que $\mu = 1$, $\mu = 2$, etc. Pour $\mu = 1$, par exemple, elle se réduit à l'identité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$. Pour $\mu = 2$, elle fournit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2};$$

or, puisqu'on a $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, cela devient simplement

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est exact. Et on vérifierait de même l'équation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \mu\theta}{\sin\theta} \cos^{\mu-1}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

pour toutes les autres valeurs entières de μ.

13.

Umkehrung des Ptolomäischen Satzes.

(Von Herrn Professor Dr. *Förstemann*, zu Danzig.)

Im 8ten Bande dieses Journals S. 320. ist von mir eine Aufgabe vorgelegt worden, welche nichts anders, als die Umkehrung des Ptolomäischen Satzes über Vierecke, die einem Kreise eingeschrieben sind, fordert. Zwar sind von dieser Aufgabe in diesem Journale schon zwei verschiedene Auflösungen gegeben (Bd. 10. S. 41. und Bd. 11. S. 264.); gleichwohl halte ich die Mittheilung meiner eigenen Auflösung nicht für überflüssig.

Es seien a, b, c, d die Seiten, p, q die Diagonalen eines einem Kreise eingeschriebenen Vierecks, und zwar so, dafs die Seiten a, c einander gegenüberliegen, wie auch b und d, und dafs die Diagonale p die beiden Ecken verbinde, von denen die eine durch das Zusammenstofsen von a mit d, die andere durch das Zusammentreffen von b mit c gebildet wird, während q die übrigen Ecken verbinde. Dann gilt nicht blofs die Gleichung des Ptolomäischen Satzes:

$$pq = ac + bd,$$

sondern auch, wegen eines andern bekannten Satzes, die folgende

$$p:q = ad + bc : ab + cd.$$

Statt dieser beiden Gleichungen können wir schreiben:

I. $ac + bd - pq = 0$, oder $A = 0$,

II. $abp + cdp - adq - bcq = 0$, oder $B = 0$;

wenn wir nemlich setzen:

$$A = ac + bd - pq, \qquad B = acp + cdp - adq - bcq.$$

Sind von einem Vierecke im Kreise die Seiten a, b, c, d gegeben, so kann man aus jenen Gleichungen p und q bestimmen. Dabei ist zu beachten, dafs durch Elimination von q und von p sich beziehlich für p und q **reine** quadratische Gleichungen ergeben, aus denen sich findet:

$$(\alpha.) \qquad p = \sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)},$$

$$(\beta.) \qquad q = \sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)},$$

so, dafs, wenn für a, b, c, d durchgängig positive Zahlen angenommen werden, für p nur ein einziger reeller Werth entstehet, und eben so auch für q; indem es hier offenbar nicht nöthig ist, die negativen Werthe der Quadratwurzeln zu berücksichtigen.

Nun ergiebt sich leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes: „Hat man ein Viereck, dessen Seiten und Diagonalen den Gleichungen (I.) und (II.) genügen, so kann durch die Eckpuncte desselben ein Kreis beschrieben werden." Ein Viereck im Kreise nemlich wird schon durch seine vier Seiten bestimmt; stellte man sich nun ein Viereck im Kreise mit den Seiten a, b, c, d vor, dessen Diagonalen p' und q' hiefsen, so müfste dasselbe auch den Gleichungen I. uud II. genügen, nur p' und q' statt p, q geschrieben; vermöge der vorher betrachteten Natur der Gleichungen (α.) und (β.) müfste daher sein: $p = p'$, $q = q'$, und, wie leicht daraus folgt, das Viereck aus a, b, c, d, p, q dem aus a, b, c, d, p', q' congruent, mithin jenes ebenfalls ein Viereck im Kreise.

Um nun den Satz zu beweisen: „Genügen die Seiten und Diagonalen eines Vierecks der Gleichung (I.), so ist das Viereck ein Viereck im Kreise," wird es darauf ankommen, zu beweisen: „Wenn die Seiten und Diagonalen der Gleichung (I.) genügen, so genügen sie auch nothwendig der Gleichung (II.)."

Dieses läfst sich aber folgendermafsen leisten. Da von den sechs Gröfsen a, b, c, d, p, q schon fünf hinreichen, ein Viereck ganz im Allgemeinen zu bestimmen, so mufs es eine Gleichung zwischen jenen sechs Gröfsen geben, die bei jedem Vierecke Statt findet. Diese Gleichung ist folgende:

$$\left.\begin{array}{r} a^4c^2 + a^2c^4 + b^4d^2 + b^2d^4 + p^4q^2 + p^2q^4 \\ -a^2b^2c^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2 - b^2c^2d^2 - a^2c^2p^2 - a^2c^2q^2 \\ -b^2d^2p^2 - b^2d^2q^2 - a^2p^2q^2 - b^2p^2q^2 - c^2p^2q^2 - d^2p^2q^2 \\ + a^2b^2p^2 + a^2d^2q^2 + b^2c^2q^2 + c^2d^2p^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Man findet diese Gleichung z. B. bewiesen in Carnot's Geometrie der Stellung, übersetzt von Schumacher Th. II. S. 258. Den in derselben links stehenden Ausdruck können wir aber, wie sich bei der Prüfung bestätigen wird, ausdrücken durch $AC+B^2$, wenn wir setzen:
$C = (a^2+c^2)(ac-bd+pq)+(b^2+d^2)(-ac+bd+pq)-(p^2+q^2)(ac+bd+pq)$,
so, dafs also geschrieben werden kann:

$$\text{III.} \qquad AC+B^2 = 0,$$

als Andeutung der allgemeinen Gleichung für die sechs Gröfsen a, b, c, d, p, q bei jedem Vierecke.

Nun folgt leicht: „Findet bei einem Vierecke die Gleichung (I.) Statt, d. h. ist $A=0$, so gehet die bei ihm nothwendig Statt findende Gleichung (III.) über in $B^2=0$; es ist also auch $B=0$, d. h. auch (II.) findet Statt, und somit ist das Geforderte geleistet.

Nicht eben so unmittelbar läfst sich der durch die Gleichung (II.) ausgedrückte Satz umkehren; denn ist $B=0$, so folgt zwar $AC=0$, aber nicht nothwendig $A=0$. Auch kann man keinesweges die Umkehrung des Ptolomäischen Satzes so aussprechen: „Genügen die sechs Linien a, b, c, d, p, q den Gleichungen (I.) und (III.), so kann man aus ihnen ein Viereck im Kreise bilden." Denn, obgleich man für a, b, c, d beliebige reelle und positive Werthe annehmen, dann mittelst (α.) und (β.) reelle Werthe von p und q finden kann, welche nicht blofs den Gleichungen (I.) und (II.), sondern auch der Gleichung (III.) genügen, so wird doch nicht immer ein Viereck möglich sein, welches diese reellen Linien a, b, ... enthält; das Viereck ist z. B. unmöglich, wenn man die Linien a, b, c, d so wählt, dafs eine derselben gröfser ist, als die Summe der übrigen.

Der Beweis, welcher für den hier beweisenen Satz im 8ten Bande dieses Journals gegeben ist, scheint mir nicht genügend. Es ist darin von einer Bedingungsgleichung die Rede, welche für die sechs Gröfsen a, ..., q bei jedem Vierecke statt finden müsse. Diese Bedingungsgleichung, offenbar die hier mit (III.) bezeichnete, wird aber nicht aufgestellt, und nur bewiesen, sie müsse von $pq=ac+bd$ verschieden sein, so, dafs mittelst dieser beiden Gleichungen für gegebene Werthe von a, b, c, d sich die zugehörigen Werthe von p und q bestimmen lassen müfsten. Es scheint aber hieraus nicht mit Sicherheit geschlossen werden zu können, dafs ein Viereck, welches die gegebenen Seiten a, b, c, d und die auf jene Art berechneten Diagonalen p und q enthält, ein Viereck im Kreise, also identisch mit dem durch a, b, c, d schon völlig bestimmten Vierecke im Kreise sein müsse. Könnten sich nicht, bei Auflösung der beiden in Rede stehenden Gleichungen, mehrfache Werthe von p und q ergeben? Nur dafs, wie oben gezeigt wurde, aus (I.) und (III.) auch (II.), dann aber aus (I.) und (II.) sich (α.) und (β.) ergeben, welche Gleichungen für

jede Diagonale nur einen einzigen Werth darbieten, scheint einen sichern Schluſs möglich zu machen. Freilich würde man, auch ohne weitere Kenntniſs der Beschaffenheit der Bedingungsgleichung (III.), sagen können: ein Viereck, das den Gleichungen (I.) und (III.) genüge, erfordere zu seiner Bestimmung vier Stücke, statt fünf; wollte man aber vielleicht hieraus folgern, es müsse ein Viereck im Kreise sein, so ginge dies eben so wenig an, wie, wenn man (so wie in einem Beweise des Parallelogramms der Kräfte im 1sten Bande dieses Journals geschehen) behauptete, ein Viereck, daſs durch drei Stücke bestimmbar sei, müsse durchaus ein Parallelogramm sein.

14.

Einfacher Beweis eines Satzes der Combinationslehre.

(Von Herrn Prof. Dr. *Förstemann* zu Danzig.)

Bezeichnet man die Anzahl der Combinationen zur $n$ten Classe aus m verschiedenen Elementen ohne Wiederholungen mit $\overset{n}{C}_m$, bei unbeschränkten Wiederholungen aber mit $\overset{n}{C}_m$ rep., so ist bekanntlich

$$\text{I.} \qquad \overset{n}{C} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)n},$$

$$\text{II.} \qquad \overset{n}{C}\,\text{rep.} = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)n}.$$

Gegen den Beweis, welcher für die erste von diesen Formeln gegeben zu werden pflegt, ist nichts zu erinnern. Die zweite aber findet man in verschiedenen Lehrbüchern auf verschiedene, in manchen auf ungenügende Art bewiesen; und selbst diejenigen Beweise dieser Formel, welche in Hinsicht auf Genauigkeit nichts zu wünschen übrig lassen, sind doch von solcher Art, dafs sie nicht völlig befriedigen, und, besonders beim Unterrichte, einen einfacheren Beweis, der leichter aufzufassen und zu behalten sei, vermissen lassen. Deshalb wird die Mittheilung des folgenden, wie es mir scheint, höchst einfachen Beweises vielleicht Entschuldigung finden.

Da nach der als bewiesen angenommenen Gleichung I. auch

$$\overset{n}{C}_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)n}{1.2\ldots(n-1)n},$$

so wird es nur darauf ankommen, zu beweisen, dafs die Gleichung Statt findet:

$$\text{III.} \qquad \overset{n}{C}_m\,\text{rep.} = \overset{n}{C}_{m+n-1},$$

d. h. zu beweisen, dafs aus m Elementen eben so viele Combinationen mit Wiederholungen zur $n$ten Classe gebildet werden können, wie aus $m+n-1$ Elementen Combinationen ohne Wiederholungen, ebenfalls zur $n$ten Classe; dann wird sich die Gleichung II. sogleich als richtig ergeben. Jenes wird aber folgendermafsen bewiesen.

Aus jeder Combinationsform mit Wiederholungen der $n$ten Classe aus den m Elementen 1, 2, ... m kann man eine Combinationsform ohne Wiederholungen der $n$ten Classe aus den $(m+n-1)$ Elementen 1, 2, ... m, $(m+1)$....$(m+n-1)$ herleiten, indem man über die n in der Form enthaltenen Elemente, nach der Reihe, die Indices 0, 1, 2, ... $(n-1)$ schreibt, und dann zu jedem Elemente den darüber stehenden Index addirt. Z. B. zu den Combinationen mit Wiederholungen der 4ten Classe aus den 3 Elementen 1, 2, 3 gehört die Form 2233. Verfährt man hiermit nach der Vorschrift, so hat man

Indices:	0123,
gegebene Form:	2233,
neue Form:	2356.

Diese neue Form gehört wirklich zu den Combinationen ohne Wiederholungen aus den $3+4-1=6$ Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ebenfalls zur 4ten Classe. Es wird aber, ganz im Allgemeinen, die neue Form wirklich zu den Combinationen ohne Wiederholungen der $n$ten Classe aus den Elementen 1, 2, ... $(m+n-1)$ gehören, weil bei jener Ableitungsweise diese neue Form weder ein Element enthalten kann, welches über $(m+n-1)$ hinausgehet, noch gegen das Gesetz verstofsen kann, dafs einem Elemente in der Form nur höhere Elemente folgen sollen. Durch Subtraction der Indices gehet man leicht den entgegengesetzten Weg, von den Combinationen ohne Wiederholungen zu den Combinationen mit Wiederholungen, und auch hier siehet man leicht, dafs die entstehende Form kein über m hinausgehendes Element enthalten, und auch nicht gegen das Gesetz verstofsen kann, nach welchem einem Elemente kein niedrigeres folgen soll. So ergiebt sich, dafs überhaupt die Formen beider Arten einander paarweise genau correspondiren, dafs es also so viel Formen der einen wie der andern Art giebt, oder dafs die Gleichung III. wirklich richtig ist.

Noch werde bemerkt, dafs der niedrigsten Form mit Wiederholungen, nämlich 111...1, auf diese Weise die niedrigste Form ohne Wiederholungen 123....n, und der höchsten Form mit Wiederholungen, nämlich $m\,m\,m$ .... m, die höchste ohne Wiederholungen $m(m+1)(m+2)$....$(m+n-1)$ entspricht, ja, dafs überhaupt, bei lexicographischer Anordnung beider Arten von Combinationsformen, die $r$te

Form der einen Art der *r*ten Form der andern Art correspondirt, wie z. B. folgende Aufstellung der Combinationen mit Wiederholungen der 3ten Classe aus 1, 2, 3 und der Combinationen ohne Wiederholungen der 3ten Classe aus 1, 2, 3, 4, 5 zeigt:

Comb. m. W.: 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333,
Comb. o. W.: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

Wie es scheint ist dieser Beweis, nach seiner Grundidee höchst nahe liegend, leicht aufzufassen und leicht zu behalten. Man möchte fast glauben, er müsse längst bekannt sein; doch habe ich ihn nirgend gefunden, so viel Werke ich auch deshalb nachschlug. Sollte er dennoch schon irgend wo sich mitgetheilt finden, so würde eine Notiz darüber mich zum Danke verpflichten.

Danzig, den 13ten October 1834.

15.

Zur Begründung und Erweiterung der Variationsrechnung.

(Von Herrn Dr. *A. Müller*, in Heidelberg.)

Das von Euler der Variationsrechnung untergelegte Princip, ist selbst von Lagrange, dem Erfinder dieser Rechnungsweise, gutgeheifsen und angenommen worden. Auch die neuere Zeit hat nichts daran geändert, noch dasselbe durch ein anderes verdrängt. Obwohl nun aus diesem letzten Umstande für das Euler'sche Princip nichts gefolgert werden kann, da die ungewöhnliche Höhe der Abstraction durch ihre Reize nur Wenige anzuziehen scheint, so ist es doch gewifs, dafs Euler's Grundgedanke eben so als der allein wahre dasteht, wie er an Kühnheit Alles übertrifft. Nur fehlt ihm die erforderliche volle Bestimmtheit, und er steht völlig isolirt. Als ich vor einiger Zeit diesem Gegenstande mit aller Aufmerksamkeit nachdachte, fand ich, dafs das, was Euler als Princip der Variationsrechnung aufstellte, nicht allein einer genauen Bestimmung fähig, sondern auch, vom Isolirtsein weit entfernt, ein Glied, aber auch nur ein Glied einer unendlichen Reihe von Wahrheiten ist, die wir noch zu entwickeln haben. Ich will im Folgenden versuchen, das Feld dieser Wahrheiten eröffnen zu helfen.

I. Begriff von Function.

§. 1.

Man unterscheidet gewöhnlich veränderlich und constante Gröfsen. Obgleich dieser Sprachgebrauch der Natur der Sache nicht angemessen ist, so soll er doch, in Ermangelung eines besseren, im Folgenden beibehalten werden. Mit Beziehung auf ihn unterscheide ich wesentliche und unwesentliche Constanten. Beide sind in jedem gegebenen Falle leicht zu unterscheiden, so schwer auch die Angabe der allgemeinen Charactere derselben ist. Die unwesentlichen Constanten kann man daran erkennen, dafs sie aus einem Ausdrucke oder einer Gleichung entfernt werden können, ohne dafs die Natur des Ausdrucks oder

der Gleichung verändert wird; die wesentlichen können aber nicht entfernt und nur mit andern wesentlichen Constanten vertauscht werden.

§. 2.

Es sei zwischen zwei unveränderlichen Gröfsen x und y, und einer wesentlichen Constante a, eine Gleichung gegeben. Je nach der Natur dieser Gleichung giebt es eine oder mehrere besondere Gleichungen, von denen jede der gegebenen genügt, und welche sämmtlich die Form haben:

$$y = \varphi(a, x).$$

Um nun aus einer solchen Gleichung alle nur möglichen Werthe zu erhalten, welche y nach und nach annehmen kann, verfährt man am einfachsten so: man setzt statt a einen ersten möglichen Werth a_0, und nun statt x, nach und nach alle möglichen Werthe, die durch x_0, x_1, x_2, ... bezeichnet werden mögen, und entwickelt die zugehörigen, möglichen Werthe von y. Diese sollen $y_0^{(0)}$, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ... heifsen.

Nun setzt man für a einen zweiten möglichen Werth a_1, statt a wieder die Werthe x_0, x_1, x_2, ..., und sucht die zugehörigen Werthe von y, welche durch $y_1^{(1)}$, $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, ... angezeigt werden mögen.

Man setzt ferner für a einen dritten möglichen Werth a_2, statt x die Werthe x_0, x_1, x_2, ..., und sucht die Werthe $y_0^{(2)}$, $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, ... von y, etc.

Alle diese möglichen Werthe von y kann man in folgendes Schema bringen:

a_5	$y_0^{(5)}$	$y_1^{(5)}$	$y_2^{(5)}$	$y_3^{(5)}$	$y_4^{(5)}$	$y_5^{(5)}$	....
a_4	$y_0^{(4)}$	$y_1^{(4)}$	$y_2^{(4)}$	$y_3^{(4)}$	$y_4^{(4)}$	$y_5^{(4)}$	....
a_3	$y_0^{(3)}$	$y_1^{(3)}$	$y_2^{(3)}$	$y_3^{(3)}$	$y_4^{(3)}$	$y_5^{(3)}$	....
a_2	$y_0^{(2)}$	$y_1^{(2)}$	$y_2^{(2)}$	$y_3^{(2)}$	$y_4^{(2)}$	$y_5^{(2)}$	....
a_1	$y_0^{(1)}$	$y_1^{(1)}$	$y_2^{(1)}$	$y_3^{(1)}$	$y_4^{(1)}$	$y_5^{(1)}$	....
a_0	$y_0^{(0)}$	$y_1^{(0)}$	$y_2^{(0)}$	$y_3^{(0)}$	$y_4^{(0)}$	$y_5^{(0)}$	....
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	....

Die unterste Reihe enthält alle möglichen Werthe von x, und die erste, aufwärts gehende Reihe alle möglichen Werthe von a. Von den horizontalen Reihen enthält die erste jene Werthe, welche y bei $a = a_0$, die zweite aber jene Werthe, welche y bei $a = a_1$, u. s. w. annehmen kann.

Dies vorausgesetzt, läfst sich die Bedeutung der Sätze: y ist eine Function von a, u. s. w. so bezeichnen:

1) Betrachtet man in der gegebenen Gleichung y als Function von x, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe des Schema's.
2) Betrachtet man y als Function von a, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe.
3) Betrachtet man y als Function von a und x, so ist y irgend ein Glied des ganzen Schema's.

§. 3.

Es sei eine Gleichung zwischen den veränderlichen Gröfsen x und y, und den wesentlichen Constanten a und b gegeben. Die allgemeine Form der Auflösung dieser Gleichung ist:

$$y = \varphi(x : a, b).$$

Aus dieser Gleichung alle möglichen Werthe von y zu erhalten, setze man für b einen ersten möglichen Werth b_0, und bilde ein Schema, das alle Werthe von y enthält, die bei diesem Werthe von b aus allen möglichen Werthen von a und x entspringen können. Man setze für b einen zweiten möglichen Werth b_1, und bilde ein zweites Schema, u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung kann man die Begriffe, welche mit den Sätzen: y ist eine Function von x, oder von a, u. s. w. verbunden sind, so feststellen:

1) Betrachtet man y als Function von x, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe eines bestimmten Schema's.
2) Betrachtet man y als Function von a, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe eines bestimmten Schema's.
3) Betrachtet man y als Function von b, so ist y ein Glied in einer bestimmten verticalen und in einer bestimmten horizontalen Reihe irgend eines Schema's.
4) Betrachtet man y als Function von a und x, so ist y irgend ein Glied in einem bestimmten Schema.
5) Betrachtet man y als Function von b und x, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe irgend eines Schema's.
6) Betrachtet man y als Function von a und b, so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe irgend eines Schema's.
7) Betrachtet man y als Function von a, b und x, so ist y irgend ein Glied des ganzen Systems.

§. 4.

Befinden sich in einer Gleichung zwischen x und y drei wesentliche Constanten, so mufs man, um alle möglichen allgemeinen Begriffe von y bezeichnen zu können, die möglichen Werthe von y in ein System gebracht annehmen. Die Bestandtheile dieses Systems sind wieder Systeme, welche aus Schematen bestehen. Man kann zur festen Bezeichnung folgende Benennungen einführen:

System erster Ordnung = System, dessen Bestandtheile Schemate sind,
- zweiter - = - , - - - Systeme erster Ordnung sind,
- dritter - = - , - - - Schemate zweiter Ordnung sind.

Unter dieser Voraussetzung kann man leicht die Bedeutung der Sätze: y ist eine Function von x, u. s. w. angeben, und so eigentlich die verschiedenen Begriffe von y als Function fixiren.

§. 5.

Ist eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Gröfsen x, y, z und einer wesentlichen Constante a gegeben, so kann man die Werthe von z, als Function betrachtet, ebenfalls in einzelne Schemate bringen. Das erste Schema wird jene Werthe von z enthalten, welche bei einem ersten Werthe von y, und allen möglichen Werthen von a und x, möglich sind; das zweite alsdann jene, die zu einem zweiten Werthe von y und allen möglichen Werthen von a und x gehören, u. s. w. Diese verschiedenen Schemata kann man nun als in Ebenen befindlich ansehen, die Ebenen endlich über einander geschichtet sich vorstellen, und das ganze nun eine Schichtung nennen.

Kommen in der Gleichung zwischen x, y, z zwei wesentliche Constanten a und b vor, so lassen sich die möglichen Werthe von z, welche zu einem Werthe von b und allen möglichen Werthen von a, x, y gehören, in eine Schichtung, und auf diese Weise alle nur möglichen Werthe von z in ein System von Schichtungen gruppiren, welches man Schichtung-System erster Ordnung nennen kann.

Bei einer Gleichung zwischen x, y, z und drei wesentlichen Constanten, werden die möglichen Werthe von z in ein Schichtung-System zweiter Ordnung gebracht, dessen Bestandtheile Schichtung-Systeme erster Ordnung sind.

Der Fortgang ist hierdurch genugsam bezeichnet, und bedarf keiner weiteren Andeutung.

Durch diese Werth-Anordnung ist das bestimmteste und sicherste Mittel geboten, nicht allein die verschiedenen Begriffe von Function zu unterscheiden, sondern auch jeden einzelnen Begriff zu fixiren.

Es ist bei dieser Auseinandersetzung jede besondere Bedeutung der Gröfsen $x, y, \ldots$ absichtlich vermieden, und unbestimmt gelassen worden, ob diese Gröfsen Linien oder etwas anders sein sollen. Der Übergang zum Besondern ist leicht. Übrigens wird man ohne Erinnern einsehen, dafs das Voranstehende eigentlich der ganzen höhern Analysis vorausgeschickt werden mufs; es steht, als Einleitung, nur darum hier, weil es überhaupt gewöhnlich fehlt, für die Variationsrechnung aber unumgänglich nothwendig ist.

II. Verallgemeinerung der Functionen oder Gesetze der Variation.

§. 6.

Jede Function von x u. s. w., oder jede Gleichung zwischen $x, y, \ldots$ kann man als einen speciellen Fall einer allgemeineren Function, oder einer allgemeineren Gleichung betrachten. So ist z. B. die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ nur ein specieller Fall von

$$y^2 = px + \psi(x, a),$$

wo a eine wesentliche Constante bezeichnet, und entspringt aus dieser allgemeineren Gleichung, wenn die Function $\psi(x, a)$ für irgend einen besonderen Werth von a verschwindet. Da nun die möglichen Werthe von y, welche aus der Gleichung $y^2 = px$ sich ergeben, in ein Schema gruppirt werden können, oder alle möglichen Parabeln ein Schema bilden, alle möglichen Curven aber, welche aus der allgemeineren Gleichung $y^2 = px + \psi(x, a)$ folgen, ein System erster Ordnung bilden, dessen Bestandtheile Schemata sind, so kann man so von dem Begriffe der Parabel zu einem viel allgemeineren aufsteigen, indem man die Gleichung der Parabel als speciellen Fall der allgemeineren $y^2 = px + \psi(x, a)$ betrachtet, und diese letztere statt der Gleichung $y^2 = px$ gebraucht. Für den Rückgang vom Allgemeinen zum Besonderen bleibt dann immer die Bedingung, dafs bei einem besonderen Werthe von a die Function $\varphi(x, a)$ verschwinde.

Obgleich, wegen der willkürlichen Function ψ, in der allgemeineren Gleichung, eine unendliche Anzahl Gleichungen, welche alle diese Form haben, begriffen sein kann, so hängt die Allgemeinheit der Gleichung doch keineswegs von der Willkürlichkeit der Functionsweise ψ, sondern einzig und allein von der neu eingeführten wesentlichen Constante a ab. Man mag für ψ eine Functionsweise annehmen, welche man will: immer bilden die möglichen Werthe von y, welche aus der Gleichung $y^2 = px + \psi(x, a)$ entspringen, nur ein System erster Ordnung, und man hat für die Mannigfaltigkeit der Begriffe, welche man mit y verbindet, keinen gröfseren Spielraum, als eben dieses System erster Ordnung.

Anders wird die Sache, wenn $\psi(x, a)$ nicht blofs a, sondern auch noch eine zweite wesentliche Constante b enthält. Alsdann erhält man für die Mannigfaltigkeit der Begriffe von y ein System zweiter Ordnung, in welchem das vorerwähnte System erster Ordnung als Bestandtheil erscheinen kann.

Hieraus geht hervor:

1) Wenn zwischen x und y eine entwickelte oder unentwickelte Gleichung gegeben ist, so wird der allgemeine Begriff, der mit y verbunden sein kann, zu einer gröfseren Allgemeinheit dadurch erhoben, dafs man in die Gleichung eine neue wesentliche Constante a einführt, unter der Voraussetzung, dafs aus der allgemeinen Gleichung, bei einem besonderen Werthe von a, die besondere entspringt. Diese Erweiterung der Begriffsphäre von y kann man erste Erweiterung nennen.

2) Von der ersten Erweiterung kann man zu einer zweiten gehen, indem man eine zweite wesentliche Constante b einführt, unter der Bedingung, dafs die erste Erweiterung bei einem besonderen Werthe von b hieraus entspringt.

§. 7.

Eine andere Erweiterung der Begriffsphäre, welche y, vermöge einer zwischen x und y gegebenen Gleichung, hat, ergiebt sich, wenn man, aufser einer neuen wesentlichen Constante a, auch noch eine neue, von x unabhängige, veränderliche Gröfse $x^{(1)}$ einführt. In diesem Falle erhält man für die Mannigfaltigkeit der Begriffe von y ein Schichtung-System erster Ordnung, und der erste allgemeine Begriff von y, den man für y aus der ursprünglichen Gleichung erhalten kann, ist in dem zwei-

ten, allgemeineren enthalten, wenn die Einführung von a und $x^{(1)}$ in der Art geschieht, dafs bei einem besonderen Werthe von a die besondere Gleichung aus der allgemeineren entspringt.

Dafs man auf diese Weise, und unter ähnlichen Bedingungen, beliebig viele von einander unabhängige veränderliche Gröfsen und wesentliche Constanten in die gegebene Gleichung einführen könne, ist leicht zu sehen.

§. 8.

Eine dritte Erweiterungsart der Begriffsphäre von y findet Statt, wenn man in die zwischen x und y gegebene Gleichung, statt x, eine Function von einer veränderlichen Gröfse u, in Verbindung mit einer oder mit mehreren wesentlichen Constanten, einführt. Es sei z. B. die gegebene Gleichung:

$$1. \qquad f(x, y, a) = 0,$$

wo a die wesentliche Constante ist. Nimmt man nun für x eine Function von u und einer wesentlichen Constante b an, und führt diese in die gegebene Gleichung ein, so hat man zwei Gleichungen:

$$2. \quad \begin{cases} f^{(1)}(y, u, a, b) = 0, \\ \varphi\,(x, u, b) \quad = 0. \end{cases}$$

Sollen diese beiden Gleichungen aber die gegebene als besonderen Fall in sich enthalten, so mufs die zweite Gleichung so beschaffen sein, dafs, bei einem besonderen Werthe von b, aus derselben $x = u$ folgt.

Angenommen, die zweite Gleichung sei so beschaffen, wie diese Bedingung fordert, so kann in (2.) jede für sich als ein specieller Fall einer allgemeinern Gleichung betrachtet, und jede auch zu einer allgemeineren erhoben werden, wenn man in jede eine neue wesentliche Constante, und zugleich eine neue von u unabhängige veränderliche Gröfse einführt. Die wesentliche Constante und die neue veränderliche Gröfse sei für die erste Gleichung $b^{(1)}$ und $u^{(1)}$, für die zweite c und v, so wird man haben:

$$3. \quad \begin{cases} F^{(2)}(y,\ u,\ u^{(1)},\ a,\ b,\ b^{(1)}) = 0, \\ \varphi^{(1)}(x,\ u,\ v,\ b,\ c,) \quad = 0, \end{cases}$$

und diese neuen Gleichungen enthalten die beiden vorigen als specielle Fälle, mithin auch die ursprüngliche Gleichung in sich, wenn sie so beschaffen sind, dafs bei einem besonderen Werthe von $b^{(1)}$ die erste der vorigen, und bei einem besonderen Werthe von c die zweite der vorigen Gleichungen entspringt.

Die Allgemeinheit der beiden letzten Gleichungen (3.) kann nun leicht noch viel weiter getrieben werden. Bleibt man aber nur bei dieser Allgemeinheit stehen, so lassen sich folgende Betrachtungen daran knüpfen:

1) Nimmt man y als Function von a, so bleibt x völlig unberücksichtigt und wird constante Gröfse in den drei Fällen (1), (2) und (3).
2) Betrachtet man y als Function von b, so wird, nach (2) und (3), auch x eine Function von b. Eben so, wenn y als Function von u genommen wird, ist auch x eine Function von u.
3) Betrachtet man aber in (3) y als Function von $u^{(1)}$ oder von $b^{(1)}$, oder von $u^{(1)}$ und $b^{(1)}$, so bleibt x, als constant, dabei unberücksichtigt, man mag x wirklich als constant ansehen, oder als Function von v, oder von c, oder von v und c betrachten.
4) Eben so kann man x als Function von v, oder von c, oder von v und c betrachten, und diese Annahme hat auf y keinen Einfluſs; es ist dabei gestattet, y als constant zu betrachten, oder als Function von $u^{(1)}$, oder von $b^{(1)}$, oder von $u^{(1)}$ und $b^{(1)}$.

Hieraus ergiebt sich die Bedeutung und zugleich die Bedingung der Wahrheit für folgenden Satz:

Wenn eine Gleichung zwischen x und y Statt findet, so kann man, dieser Gleichung unbeschadet, y als von x unabhängig betrachten, und als abhängig von einer, zwei oder mehreren Gröfsen, welche sich entweder in der Gleichung befinden, oder auch nicht darin vorkommen; und neben dieser Annahme kann man x als constant, oder als von einer, zwei, ... Gröfsen abhängig betrachten, welche in der gegebenen Gleichung nicht vorkommen.

§. 9.

Man kann auf dem vorhin bezeichneten Wege den zuletzt gefundenen Satz leicht dahin erweitern, daſs er nicht bloſs für Gleichungen zwischen zwei Gröfsen x und y, sondern für Gleichungen von jeder Anzahl veränderlicher Gröfsen gilt: mag zwischen diesen Gröfsen nur eine, oder mögen mehrere Gleichungen gegeben sein.

Als Folgerung aus dem letzten Satze kann man folgendes bemerken:

Ist zwischen x, y und einer wesentlichen Constante a eine Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

entweder gegeben oder bestimmt, und eine Function $\varphi(x, y)$ gegeben, so kann man in dieser, wie gewöhnlich geschieht, y als von x abhängig betrachten; man kann aber auch y als von x unabhängig, und als von einer oder mehreren ganz fremden Gröfsen abhängig ansehen, und dabei x entweder als constant oder als Function von einer oder mehreren fremden Gröfsen nehmen.

Man kann aber noch viel weiter gehen, und $\varphi(x, y)$, als speciellen Fall betrachtet, zu einer allgemeineren Function erheben, indem man in $\varphi(x, y)$ eine neue wesentliche Constante, oder eine neue wesentliche Constante und eine neue veränderliche, von x und y unabhängige Gröfse einführet, so, dafs man

$$\varphi^{(1)}(x, y, u, b) \text{ statt } \varphi(x, y)$$

hat. Diese Einführung hebt die ursprüngliche Function $\varphi(x, y)$ nicht auf, und die allgemeinere Function $\varphi^{(1)}$ kann statt φ gebraucht werden, wenn nur die Einführung von der Art ist, dafs bei einem besonderen Werthe von b die ursprüngliche Function φ aus der allgemeineren sich ergiebt.

Diese allgemeine Function $\varphi^{(1)}$ kann man nun im Einzelnen betrachten als Function von x, und dabei x als Function von beliebig vielen Gröfsen: alsdann bleiben y und b, als constante Gröfsen, unberücksichtigt, unbeschadet der zwischen x und y Statt findenden Gleichung.

Eben so kann man $\varphi^{(1)}$ als Function von y, und y selbst als Function von beliebig vielen Gröfsen, und dabei x und b als constant ansehen.

Man kann $\varphi^{(1)}$ als Function von y und x nehmen, dabei y von x unabhängig, und jede dieser Gröfsen als Function von andern Gröfsen.

Man kann $\varphi^{(1)}$ als Function von x, y, u, b nehmen, und dabei ebenfalls x und y als von einander unabhängig betrachten.

Nimmt man endlich $\varphi^{(1)}$ als Function von u, oder von b, oder von u und b, so bleiben x und y ohne dies aufser Acht.

§. 10.

Durch das Vorhergehende ist es leicht, die Bedeutung, den Grund und die Bedingung der Wahrheit folgender Sätze einzusehen.

Ist zwischen x und y irgend eine Gleichung gegeben, oder findet überhaupt nur eine Statt, ohne dafs sie gerade gegeben ist, und ist eine Function von der Form:

$$F(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \ldots.)$$

gegeben, so kann man darin y als von x abhängig betrachten, und dann ist F nur eine Function von x.

Man kann aber x und y, jede Gröfse für sich, bis zu irgend einem Grade der Allgemeinheit gesteigert annehmen, so dafs y nicht mehr als von x abhängig angesehen werden mufs, und diese verallgemeinerten x und y in die ganze Function F einführen; dann ist F eine Function der beiden, von einander unabhängigen Functionen x und y. Es versteht sich von selbst, dafs man die Verallgemeinerung etwa nur mit y vornehmen, und x in irgend einem Grade der Allgemeinheit nehmen, aber in der Function F ganz unberücksichtigt lassen kann. Oder umgekehrt:

Man kann die Gröfsen x und y, welche in F, aufserhalb der Functionen φ_1, φ_2, ... vorkommen, entweder gleichzeitig, oder auch nur eine allein, zu irgend einem Grade der Allgemeinheit erhoben betrachten, und dabei annehmen, es seien φ_1, φ_2, ... von diesen x und y völlig unabhängig; so, dafs F nur eine Function der beiden von einander unabhängigen Functionen x und y wird, welche aufserhalb der φ_1, φ_2, ... vorkommen.

Man kann endlich die Gröfsen x und y, sowohl jene, welche aufserhalb, als auch jene, welche innerhalb der Functionen φ_1, φ_2, ... vorkommen, als zu irgend einem Grade der Allgemeinheit erhoben betrachten, und zwar nicht allein jede Gröfse für sich, sondern auch in jeder Function φ_1, φ_2, ... wieder auf besondere Art, und entweder in allen φ_1, φ_2, ... gleichzeitig, oder auch nur in einigen.

In Summa:

Man kann in der angeführten Function $F(x, y, \varphi_1(x, y)....)$ die einzelnen Elemente x, y, φ_1, ... entweder alle zugleich, oder auch nur eines oder mehrere derselben, als eben so viele von einander unabhängige Functionen von beliebig vielen Gröfsen annehmen, und diese Annahme stört weder die zwischen x und y stattfindende Gleichung, noch die ganze Function F.

Dieser Satz kann mit Leichtigkeit so erweitert werden, dafs er für Functionen von jeder Anzahl veränderlicher Gröfsen gilt.

Es ist noch übrig, nicht sowohl die Anwendbarkeit, als vielmehr die Methoden der Anwendung der obigen Sätze zu zeigen. Ich werde dies ein ander Mal thun, und dann noch mancherlei Bemerkungen nachholen, die hier ihre Stelle haben sollten. Heidelberg, im Jahre 1829.

16.

Einiges von Näherungen in der Analysis.

(Von Herrn *N. W. Schulze*, Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt.)

I. Ein Beispiel von Näherungen bei Auflösung algebraischer Gleichungen.

Man nehme die Gleichung an:

$$x = p + z, \text{ wo } p \text{ dem } x \text{ sehr nahe kommen soll,}$$

so ist:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p} - \frac{z}{p^2} + \frac{z^2}{p^3} \ldots .$$

Alles auf gleiche Benennung gebracht und für z, z^2, ... wieder deren Werthe gesetzt, so ist, bis zum Gliede $\frac{z}{p^2}$,

$$x^2 - 2px + p^2 = 0,$$

und bis zum Gliede $\frac{z^2}{p^3}$:

$$x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 0;$$

und allgemein

$$(x-p)^m = 0,$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, und in welcher Gleichung das Fortschreiten des Näherungswerthes liegt.

Nun sei, zum Beispiel, die cubische Gleichung $x^3 = ax + b$ aufzulösen. Nimmt man $m = 3$ und setzt in die Gleichung $x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 0$ für x^3 den Werth $ax + b$, so ist:

$$x^3 = \frac{[a+3p^2]}{3p}\left[\frac{(a+3p^2)x + b - p^3}{3p}\right] + \frac{(b-p^3)x}{3p},$$

also

$$x^3 = \frac{(a+3p^2)^2 x + (b-p^3)(a+3p^2) + 3(b-p^3)px}{9p^2}.$$

Substituirt man die Werthe von x^2, x^3 wieder in die Gleichung

$$x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 0,$$

so erhält man

$$1. \quad x = \frac{6bp^2 + ap^3 + 3p^5 - ab}{6p^4 - 3ap^2 + 3bp + a^2}.$$

Für grofse a und kleine b giebt dieses, weil man dann $x = \sqrt{a}$ nehmen kann,

$$2. \quad x = \frac{5ab + 4a^2\sqrt{a}}{4a^2 + 3b\sqrt{a}},$$

und für grofse b und kleine a, wo $p = \sqrt[3]{b}$:

$$3. \quad x = \frac{9b\sqrt[3]{b^2}}{9b\sqrt[3]{b} - 3a\sqrt[3]{b^2} + a^2)}.$$

Es sei $x^3 = 3x + 2$, also $a = 3$, $b = 2$, so ist in (2.)

$$x = \frac{30 + 62{,}352}{96 + 10{,}392} = \frac{92{,}352}{46{,}392} = 1{,}990\ldots., \text{ statt } x = 2.$$

Ist $x^3 = x + 6$, also $a = 1$, $b = 6$, so ist $x = 1{,}998\ldots.$, statt $x = 2$.

Viel genauer würde der Werth sein, wenn man mit einer höheren Gleichung als $x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 0$ angefangen hätte.

II. Anwendung auf die Quadratur von Curven höherer Ordnung.

Wenn man z. B. folgende Gleichung setzt: $x\sqrt{x} = x - z$, wo x, z veränderliche Gröfsen sind und x gröfser angenommen werden mufs, als z, und man entwickelt, wie vorher, so ist

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} \ldots.$$

Nimmt man die Reihe bis zum Gliede $\frac{z}{x^2}$, so ist, für z wieder dessen Werth gesetzt,

$$\sqrt{x} - 2x + x\sqrt{x} = 0, \quad \text{oder} \quad (x-1)^2 x = 0.$$

Bis zum Gliede $\frac{z^2}{x^3}$ ist

$$(x-1)^3 x = 0$$

und allgemein

$$(x-1)^m x = 0,$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl ist

Man nehme $m = 2, 3, 4$, und substituire der Reihe nach in die Gleichungen

$$4. \quad x^3 - 2x^2 + x = 0,$$
$$5. \quad x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0,$$
$$6. \quad x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x = 0,$$

den Werth aus der Gleichung irgend einer Curve.

Man nehme z. B. die Gleichung für den Kreis:

$$x^2 = 1 - y^2,$$

so ist auch

$$x^3 = x - xy^2;$$
$$x^4 = x^2 - x^2y^2 = (1-y^2)^2;$$
$$x^5 = x(1-y^2)^2.$$

Setzt man die Werthe von x^2, x^3 in (4.), so bekommt man

$$7. \quad x = \frac{2-2y^2}{2-y^2} = 2 - \frac{2}{2-y^2};$$

dasselbe in (5.) substituirt, giebt

$$8. \quad x = \frac{(4-y^2)(1-y^2)}{4-3y^2}.$$

Diese Werthe in (6.) gesetzt, erhält man

$$9. \quad x = \frac{4(2-3y^2+y^4)}{8-8y^2-y^4}.$$

Für $y = 0$ ist $x = 1$, und $y = 1$ für $x = 0$, sowohl in (7.) als (8.) und (9.).

Setzt man $y = \frac{1}{2}$ in $x^2 = 1-y^2$, so ist

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}8660\ldots.$$

Aus (7.) folgt $x = 0{,}8571\ldots.$
Aus (8.) - $x = 0{,}8653\ldots.$
Aus (9.) - $x = 0{,}8659\ldots.$

Für $y = \frac{1}{10}$ ist, aus $x^2 = 1-y^2$,

$$x = \sqrt{0{,}99} = 0{,}99498\ldots.$$

und aus (7.)

$$x = 0{,}99497\ldots.$$

Multiplicirt man die Gleichung (7.) mit dy, so erhält man

$$\int x\,dy = 2\int dy - 2\int \frac{dy}{2-y^2} + (C=0), \text{ also}$$

$$\int x\,dy = 2y - \frac{1}{M\sqrt{2}} \log \text{brigg} \frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y},$$

wo M der Modul des Briggischen Systems ist.

Setzt man $y = \frac{1}{10}$, so ist

$$\int x\,dy = 0{,}2 - \frac{1}{0{,}43429\sqrt{2}} \log \text{brigg} \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{10}}{\sqrt{2}-\frac{1}{10}},$$

für M, 0,43429 geschrieben; also

$$\int x\,dy = 0{,}2 - 1{,}6282 \,.\, \log \text{brigg}\, 1{,}15218$$
$$= 0{,}2 - 1{,}6282 \,.\, 0{,}06152 = 0{,}09983314\ldots.$$

Und wenn man die aus $(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$ entstandene Reihe mit dy multiplicirt und integrirt, welches

$\int x\,dy = y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{40}y^5 - \frac{1}{112}y^7 \ldots$ giebt, und $y = \frac{1}{10}$ nimmt,

so erhält man

0,0998330 ....

Man erhält also den Werth um so genauer, je kleiner y genommen wird.

Für Curven, in welchen $y = 0$, wenn $x = 0$, und $y = \infty$ für $x =$ Conft. oder $x = \infty$, wo x und y auf einander rechtwinklige Coordinaten bezeichnen, könnte man etwa die Gleichung $y = x - z$, setzen, welche $(y-x)^2 = z^2$, also

$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \ldots.$ und $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{(2y-x)x} - \frac{z^2}{(2y-x)^2x^2} \ldots.$

giebt. Die Nenner weggeschafft und die Werthe von z, z^2 .... gesetzt, erhält man

10. $y^2 - 2xy + x^2 = 0,$

11. $y^4 - 4xy^3 + 6x^2y^2 - 4x^3y + x^4 = 0,$

oder allgemein $(y-x)^{2m} = 0$, wo m eine beliebige ganze positive Zahl ist.

Man nehme z. B. die Gleichung für die Cissoide: $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ und substituire für y^2, y^4 .... deren Werthe, so giebt (10.)

$\frac{x^3}{1-x} - 2xy + x^2 = 0$ und

12. $y = \frac{x}{2(1-)x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-x)}.$

Aus (11.) findet man

$\frac{x^6}{(1-x)^2} - \frac{4x.x^3}{1-x}y + \frac{6x^5}{1-x} - 4x^3y + x^4 = 0,$

also

13. $y = \frac{4(1-x)x^2 + x}{4(1-x)}.$

Für $x = 0$ ist auch $y = 0$, wie in $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$.

Für $x = 1$ ist sowohl in (12.) als (13.) $y = \infty$, wie in der Gleichung für die Cissoide selbst.

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so ist in (12.) $y = \frac{1}{2}$, also auch in (13.) $y = \frac{1}{2}$; eben wie in $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$.

Es sei $x = \frac{3}{4}$, so ist nach (12.) $y = \frac{\frac{3}{4}}{2(1-\frac{3}{4})} = \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1{,}5$, und nach (13.)

$$y = 1{,}3125\ldots.$$

Aus $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ folgt

$$y = 1{,}29886\ldots.$$

Es sei $x = \frac{3}{7}$, so ist in (12.) $y = 0{,}375$ und
in (13.) $y = 0{,}37117\ldots.$
Aus der eigentlichen Gleichung ist $y = 0{,}37115\ldots.$

Der Werth weicht am meisten ab, wenn x sehr klein ist, oder sich der Einheit nähert, und kommt dem wahren Werthe nahe, wenn x nicht bedeutend von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, was auch die Gleichung $y = x - z$ ausweiset.

Man multiplicire die Gleichung (13.), nachdem die Division ausgeführt worden, mit dx, so bekommt man

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x\int dx + \tfrac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{1-x} + (\text{Const.} = 0),$$

also

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{4}x\,\frac{\log\text{brigg}\,(1-x)}{4M}, \text{ wo } M = 0{,}43429\ldots.$$

Setzt man hierin $x = \frac{1}{2}$, so ist

$$\int y\,dx = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{\log 2}{4.0{,}43429};$$

$$= 0{,}0416666\ldots. - 0{,}125 + \frac{0{,}30103}{1{,}73716},$$

$$= 0{,}0899551\ldots.$$

Nimmt man die Gleichung für die Cissoide selbst, verwandelt $\frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{x}}$ in eine Reihe, multiplicirt dieselbe mit dx und integrirt, so erhält man

14. $$\int y\,dx = x^2\sqrt{x}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{88}x^3 + \frac{35}{832}x^4\ldots.\right).$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ist

$$x^2\sqrt{x} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}176790\ldots.$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammern ist

$$0{,}4 + 0{,}0714285 + 0{,}0208333 + 0{,}0071022 + 0{,}0027043 = 0{,}5020683.$$

Nimmt man dafür 0,503 und multiplicirt mit 0,1768, so erhält man

$$0{,}0889304\ldots.;$$

was dem Obigen ziemlich nahe kommt. Um das Integral nicht blofs für einen bestimmten Werth zu erhalten, verbinde man mit der Gleichung $(y-x)^{2m} = 0$ noch eine Gröfse, nämlich $(y - px)^{2m} = 0$, wo p diese Gröfse bedeutet. Der Kürze wegen $m = 1$ gesetzt, und in die Glei-

chung $y^2-2pxy+p^2x^2=0$ für y^2 den Werth $\frac{x^3}{1-x^3}$ gesetzt, erhält man

$$15. \quad y = \frac{(1-p^2)x^2+p^2x}{2(1-x)p},$$

oder:

$$y = \tfrac{1}{2}px-\frac{x}{2p}-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p(1-x)}$$
$$= \frac{1}{2p}(p^2-1)x-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p(1-x)},$$

also

$$\int y\,dx = \frac{1}{4p}(p^2-1)x^2-\frac{1}{2p}x\frac{1}{2M.p}\log\text{brigg.}(1-x);$$

wo p als beständig genommen wird.

Nun ist nach Obigem $y-px=0$, also $p=\frac{y}{x}$; und setzt man $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ für y, so ist $p=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$; diesen Werth für p in den obigen Ausdruck des Integrals substituirt, giebt

$$16. \quad \int y\,dx = \frac{\sqrt{(1-x)}}{2\sqrt{x}}\left(\frac{2x-1}{2(1-x)}.a^2-x-\frac{1}{M}\log\text{brigg}\,(1-x)\right).$$

Es sei $x=\frac{1}{4}$, so ist

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\log 4-\log 3}{0{,}43429}-\frac{13}{18}\right);$$
$$= 0{,}86603\left(\frac{0{,}12449}{0{,}43429}-0{,}27083\right);$$
$$= 0{,}86603(0{,}28768-0{,}27083) = 0{,}86603\times 0{,}01685;$$

also

$$17. \quad \int y\,dx = 0{,}0145926\ldots.$$

Setzt man in (15.) $x=\frac{1}{4}$, so erhält man

$$18. \quad \int y\,dx = 0{,}03125\times 0{,}441973;$$
$$= 0{,}0138116\ldots.$$

Also ist (17.) um 0,000781 gröfser als (18.), und es würde bedeutend genauer sein, wenn man $y-px=0$ wenigstens zur 4ten Potenz erhoben hätte.

Ähnliche Anwendungen lassen sich auf Curven aller Ordnungen machen. Wenn auch in den Gleichungen beide Coordinaten in höheren Potenzen vorkommen, kann man dennoch zu einer Gleichung gelangen, in der die eine der Coordinaten blofs in der ersten Potenz erscheint.

Man nehme die Gleichung $x^3=y^2-xy^2$ und verlange x in der ersten Potenz, in Werthen von y: so nehme man wieder die Gleichung

$(x-y)^{2m}=0$, oder, der Kürze wegen, blofs $(x-y)^m=0$, und setze z. B. $m=3$, also

$$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=0.$$

In diese Gleichung setze man für x^3 den Werth y^2-xy^2, so ist

$$19. \qquad x^2=\frac{(1-y)y+2xy}{3}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit x, und substituire für x^2 rechter Hand den Werth von x^2 aus voriger Gleichung, so ist

$$20. \qquad x^3=\frac{(1-y)y+2y.x^2}{3}=\frac{(1-y)y+2y\left(\frac{(1-y)y+2xy}{3}\right)}{3},$$

also

$$21. \qquad x^3=\frac{(3+y)xy+2(1-y)y^2}{9}.$$

Diese Gleichung wieder mit x multiplicirt und für x^2 dessen Werth aus (20.) substituirt, giebt

$$22. \qquad x^4=\frac{y(3+y)\left(\frac{(1-y)y+2xy}{3}\right)+2(1-y)y^2x}{9}.$$

Nun nehme man in $(x-y)^m=0$, $m=4$ und setze in die Gleichung $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=0$, für x^2, x^3, x^3, die Werthe aus (20., 20., 21., 22.) , so bekommt man

$$23. \qquad x=\frac{3+28y-4y^2}{24+16y}.$$

Für $y=\frac{1}{2}$ ist auch $x=\frac{1}{2}$, wie in $x^3=y^2-xy^2$. Man müfste auch $x=0$ bekommen für $y=0$, wenn man nicht, zu niedrig, mit $m=3$ in $(x-y)^m=0$ angefangen hätte.

17.

Three essays on mathematicks.

(By Mr. *W. H. Miller*, and Mr. *Ch. Brooke*, professors at St. Johns College at Cambridge.)

I.

To prove that $\frac{n.(n-1).(n-2)....(n-r+1)}{1.2.3....r}$ *is a whole number when n and r are whole numbers.*

(By Mr. *Miller*.)

Let the continued product $n(n-1)(n-2)....3.2.1$ be denoted by de symbol $\underline{|n}$, as proposed by Professor *Jarrett* in his Essay on notation, in the third volume of the Transactions of the Cambridge philosophical Society.

$$\frac{\underline{|n+r+1}}{\underline{|n}\,\underline{|r+1}} = \frac{n+r+1}{r+1}\frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}} = \left(\frac{n}{r+1}+1\right)\frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}} = \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n-1}\,\underline{|r+1}} = \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}},$$

$$\therefore \frac{\underline{|n+r+1}}{\underline{|n}\,\underline{|r+1}} - \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n-1}\,\underline{|r+1}} = \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}}.$$

Whence, writing $1, 2, 3, \ldots$ successively for n, and observing that

$$\frac{\underline{|r+1}}{\underline{|0}\,\underline{|r+1}} = \frac{r+1}{r}.\frac{r}{2}\ldots.\frac{2}{r}\,\frac{1}{r+1} = 1,$$

we get the following equations:

$$\frac{\underline{|r+1}}{\underline{|0}\,\underline{|r+1}} = 1$$

$$\frac{\underline{|r+2}}{\underline{|1}\,\underline{|r+1}} - \frac{\underline{|r+1}}{\underline{|0}\,\underline{|r+1}} = \frac{\underline{|r+1}}{\underline{|1}\,\underline{|r}}$$

$$\frac{\underline{|r+3}}{\underline{|2}\,\underline{|r+1}} - \frac{\underline{|r+2}}{\underline{|1}\,\underline{|r+1}} = \frac{\underline{|r+2}}{\underline{|2}\,\underline{|r}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\underline{|n+r+1}}{\underline{|n}\,\underline{|r+1}} - \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n-1}\,\underline{|r+1}} = \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}}$$

$$\therefore \frac{\underline{|n+r+1}}{\underline{|n}\,\underline{|r+1}} = 1 + \frac{\underline{|r+1}}{\underline{|1}\,\underline{|r}} + \frac{\underline{|r+2}}{\underline{|2}\,\underline{|r}} \ldots\ldots + \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\,\underline{|r}}.$$

If $r=1$, the preceeding equation becomes

$$\frac{\lfloor n+2}{\lfloor n \lfloor 2} = 1+2+3\ldots.+n+1, \text{ a whole number.}$$

If $r=2$, it becomes

$$\frac{\lfloor n+3}{\lfloor n \lfloor 3} = 1+\frac{3}{\lfloor 1 \lfloor 2}+\frac{4}{\lfloor 2 \lfloor 2}\ldots..+\frac{n+2}{\lfloor n \lfloor 2}.$$

Now every term on the right hand side is a whole number by the preceding equation. Thence $\frac{\lfloor n+3}{\lfloor n \lfloor 3}$ is a whole number. In the same manner we prove that $\frac{\lfloor n+4}{\lfloor n \lfloor 4}$, $\frac{\lfloor n+5}{\lfloor n \lfloor 5}$, and soon successively, as for as we please, are whole numbers.

II.

An investigation of the caustics produced by successive reflexion at spherical surfaces.

(By Mr. *Miller*.)

Let $R_0, R_1, R_2, \ldots. R_n, R_{n+1}$ (Tab. II. Fig. 1.) be the path of the axis of a pencil of rays, reflected n times by a spherical surface at the points $R_1, R_2, \ldots. R_n$; C the center of the surface; Q the focus of incident rays; $q_1, q_2, \ldots. q_n$ the points to which the rays in the plane of reflexion converge after 1, 2, ... n reflexions.

Bisect R_0R_1, $R_1R_2 \ldots. R_nR_{n+1}$ in the points $E_0, E_1, \ldots. E_n$, and let $R_0R_1=2c$, $CR_n=a$, $R_0CR_1=2\tau$.

Now

$$\frac{1}{q_1E_1}-\frac{1}{QE_0}=\frac{2}{c},$$
$$\frac{1}{q_2E_2}-\frac{1}{q_1E_1}=\frac{2}{c},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{q_nE_n}-\frac{1}{q_{n-1}E_{n-1}}=\frac{2}{c},$$

thence

$$\frac{1}{q_nE_n}-\frac{1}{QE_0}=\frac{2n}{c}.$$

Tho find the successive caustics when parallel rays are incident upon a spherical reflector.

Let the incident rays be all parallel to R_0R_1, **or** $\frac{1}{QE_0}=0$: **we get** $\frac{1}{q_nE_n}=\frac{2n}{c}$ **and** $q_nE_n=\frac{R_nE_n}{2n}$. **Draw** q_nI **parallel to** CR_{n+1}, **meeting** CR_n **in** I. **With center** I **and radius** IR_n **describe the circle** Hq_nR_n **meeting** q_nI **in** B, **and with center** C **and radius** CH **describe the circle** AKH. **It is easily seen that** $CH=\frac{a}{2n}$, $IH=\frac{2n-1}{4n}.a$ **and** $BH=IH\,(\angle BIH)=\frac{2n-1}{4n}a.2\tau$. **Now** $DKH=CH\,(\angle DCH)=\frac{a}{2n}(2n-1)\tau$; $\therefore DKH=BH$, $\therefore$ q_n **is a point in the epicycloid whose base is** HKD **and generating circle the circle** HBq_n. **The epicycloid touches the reflecting surface in** I. **The angle between** CI **and the cusp of the epicycloid is** $\frac{2n-1}{2}\pi$.

The caustic is of course the surface generated by the revolution of this epicycloid round a line through C **parallel to** R_1R_0.

To find the successive caustics when the incident rays diverge from a point in the surface of the spherical reflector.

Let the incident rays diverge from R_0; $\therefore \frac{1}{q_nE_n}=\frac{2n}{c}+\frac{1}{c}$, $\therefore q_nE_n=\frac{c}{2n+1}$. **Draw** q_nI **parallel to** CR_{n+1}; **with the centre** I **and radius** IR_n **describe the circle** HQ_nR_n **meeting** q_nI **in** B, **and with centre** C **and radius** CH **describe the circle** AKH. **Now** $EH=\frac{a}{2n+1}$, $IH=\frac{na}{2n+1}$. $AKH=CH.(\angle ACH)=\frac{a}{2n+1}.2n\tau$, $BH=IH(\angle BIH)=\frac{na}{2n+1}.2\tau$; $\therefore AKH=BH$; $\therefore$ q_n **is a point in the epicycloid whose base is the circle** AKH, **and generating circle** q_nHB. **This epicycloid touches the reflector in** R **and comes to a cusp after describing an angle** $n\pi$. **And the caustic is the surface generated by the revolution of the epicycloid round** CR_0.

III.

Solution of the partial-differential equation to the motion of sound in space.

(By Mr. *Ch. Brooke.*)

Nota. $d_x z$ denotes the differential coefficient of z with respect to x, or $\frac{dz}{dx}$, as it is often written.

Solution of the equation

$$1. \qquad d_y^2 z = k^2\left(d_x^2 z + \frac{2}{x} d_x z - \frac{2}{x^2} z\right).$$

Generally, if x and y be supposed functions of u and v:

$$d_x z = d_x u\, d_u z + \frac{d}{x} v \frac{d}{v} z,$$

$$d_y z = \frac{d}{y} u\, d_u z + d_y v\, d_v z,$$

$$d_x^2 z = (d_x u)^2 d_u^2 z + 2\, d_x u\, d_x v\, d_u d_v z + (d_x v)^2 d_v^2 z + d_x^2 u\, d_u z + d_x^2 v\, d_v z,$$

$$d_x d_y z = d_x u\, d_y u\, d_u^2 z + (d_x u\, d_y v + d_y u\, d_x v)\, d_u d_v z + d_x v\, d_y v\, d_v^2 z + d_x d_y u\, d_u z + d_x d_y v\, d_v z,$$

$$d_y^2 z = (d_y u)^2 d_u^2 z + 2\, d_y u\, d_y v\, d_u d_v z + (d_y v)^2 d_v^2 z + d_y^2 u\, d_u z + d_y^2 v\, d_v z.$$

Assume $u = x + ky$, $v = x - ky$, then $x = \frac{1}{2}(u+v)$ and

$$d_x z = d_u z + d_v z,$$

$$d_x^2 z = d_u^2 z + 2\, d_u d_v z + d_v^2 z,$$

$$d_y^2 z = k^2 (d_u^2 z - 2\, d_u d_v z + d_v^2 z).$$

Substituting these values in (1.), we have

$$2. \qquad d_u d_v z + \frac{1}{u+v}(d_u z + d_v z) - \frac{2z}{(u+v)^2} = 0.$$

Assume

$$3. \qquad d_v z + \frac{z}{u+v} = t, \quad \text{or} \quad d_v z = t - \frac{z}{u+v}$$

$$\therefore d_u d_v z + \frac{1}{u+v} d_u z - \frac{z}{(u+v)^2} = d_u t,$$

$\therefore$ from (2.)

$$d_u t + \frac{1}{u+v} d_v z - \frac{z}{(u+v)^2} = 0.$$

Substituting in this equation for $d_v z$ its value in (3.):

$$d_u t + \frac{t}{u+v} - \frac{2z}{(u+v)^2} = 0,$$

whence

$$z = \tfrac{1}{2}(u+v)^2 d_u t + \tfrac{1}{2}(u+v)\, t$$

and

$$d_v z = \tfrac{1}{2}(u+v)^2 d_u d_v t + (u+v) d_u t + \tfrac{1}{2}(u+v) d_v t + \tfrac{1}{2} t.$$

Substituting these values of z and $d_v z$ in (3.), we obtain

$$4. \qquad d_u d_v t + \frac{3}{u+v} d_u t + \frac{1}{u+v} d_v t = 0.$$

Assume

$$5. \qquad d_v t + \frac{3t}{u+v} = w, \quad \text{or} \quad d_v t = w - \frac{3t}{u+v},$$

then

$$d_u d_v t + \frac{3}{u+v} d_u t - \frac{3t}{(u+v)^2} = d_u w,$$

$$\therefore \text{ from (4.)} \quad d_u w + \frac{3t}{(u+v)^2} + \frac{1}{u+v} d_v t = 0.$$

Substituting in this equation for $d_v t$ its value in (5.) we have

$$d_u w + \frac{w}{u+v} = 0$$

whence

$$w = \frac{d_v^2 \varphi(v)}{u+v}.$$

(The form $d_v^2 \varphi$ is assumed for convenience)

$$\therefore \text{ from (5.)} \quad d_v t + \frac{3t}{u+v} = \frac{d_v^2 \varphi(v)}{u+v} \text{ and}$$

$$(u+v)^3 d_v t + 3(u+v)^2 t = (u+v)^2 d_v^2 \varphi(v),$$

and by integration

$$(u+v^3) t = (u+v)^2 d_v^2 \varphi(v) - 2(u+v) d_v \varphi(v) + 2\varphi(v) + F(u),$$

or

$$(u+v) t = d_v^2 \varphi(v) - \frac{2}{u+v} d_v \varphi(v) + \frac{2}{(u+v)^2} \varphi(v) + \frac{F(u)}{(u+v)^2}.$$

Substituting in this equation for t its value in (3.) we obtain

$$(u+v) d_v z + z = d_v^2 \varphi(v) - \frac{2}{u+v} d_v \varphi(v) + \frac{2}{(u+v)^2} \varphi(v) + \frac{1}{(u+v)^2} F(u).$$

Integrating,

$$(u+v)z = d_v \varphi(v) - \frac{2}{u+v}\varphi(v) - \int_v \frac{2}{(u+v)^2} \varphi(v) + \int_v \frac{2}{(u+v)^2} \varphi v - \frac{1}{u+v} F(u) + \psi(u)$$

and

$$z = \frac{1}{u+v} d_v \varphi(v) - \frac{2}{(u+v)^2} \varphi(v) + \frac{1}{u+v} \psi(u) - \frac{1}{(u+v)^2} F(u).$$

To render the functions of u symmetrical with those of v, assume $\varphi = -d_v f$ and $F = -2f$, then

$$z = \frac{2}{(u+v)^2} [f(u) - \varphi(v)] - \frac{1}{u+v} [d_u f(u) - d_v \varphi(v)]$$

$$= \frac{1}{2x^2} [f(x+ky) - \varphi(x-ky)] - \frac{1}{2x} [d_{x+ky} f(x+ky) - d_{x-ky} \varphi(x-ky)].$$

18.

Beitrag zur analytischen Sphärik.

(Von Herrn Prof. Dr. *E. Gudermann* in Münster.)

1.

In meinem Grundrisse der analytischen Sphärik sind Formeln entwickelt worden, nach welchen man aus den gegebenen Gleichungen zweier Hauptkreise den Winkel berechnen kann, unter welchem sich diese beiden Linien schneiden. Es zeigt sich aber nicht selten das Bedürfnifs, wenn die Gleichung eines Systemes zweier Hauptkreise gegeben ist, unmittelbar aus dieser Gleichung den Winkel der beiden Hauptkreise zu bestimmen.

Ist $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$ die Gleichung des Systemes der beiden Hauptkreise, und bezeichnet (x', y') den Durchschnittspunct derselben, so haben die einzelnen Gleichungen derselben die Form

$$y-y' = v(x-x') \quad \text{und} \quad y-y' = v'(x-x'),$$

und die Gleichung des Systemes der beiden Hauptkreise ist also

$$[y-y'-v(x-x')].[y-y'-v'(x-x')] = 0;$$

wird diese Gleichung entwickelt und mit der gegebenen Gleichung identificirt, so erhält man die folgenden Bestimmungen:

$$\begin{aligned} -A(v+v') &= 2B, \\ A.v.v' &= C, \\ A(-2y'+(v+v')x') &= 2D, \\ A(-2vv'x'+(v+v')y') &= 2E, \\ A(y'^2-(v+v')x'y'+vv'x'^2) &= G. \end{aligned}$$

Die vier ersten Formeln geben zunächst die beiden Gleichungen

$$Ay'+Bx'+D = 0, \quad \text{und} \quad By'+Cx'+E = 0,$$

welche zur Bestimmung des Durchschnittspunctes (x', y') der beiden Hauptkreise dienen, und aufgelöset die beiden Formeln geben:

$$x' = \frac{AE-BD}{B^2-AC} \quad \text{und} \quad y' = \frac{CD-BE}{B^2-AC}.$$

Der Ausdruck für G läfst sich umformen in $G=-Dy'-Ex'$; und werden hierin noch für x' und y' die so eben gefundenen Ausdrücke substituirt, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$AE^2-2BDE+CD^2+G(B^2-AC) = 0$$

für die Constanten der gegebenen Gleichung, wenn sie einem Systeme zweier Hauptkreise zugehören soll.

Für v und v' erhält man endlich die Ausdrücke

$$v = \frac{-B+\sqrt{(B^2-AC)}}{A} \quad \text{und} \quad v' = \frac{-B-\sqrt{(B^2-AC)}}{A},$$

woraus noch zum künftigen Gebrauche folgt: $v-v' = \frac{2\sqrt{(B^2-AC)}}{A}$.

Sind nun aber $ax+by+c=0$ und $a'x+b'y+c'=0$ die Gleichungen zweier Hauptkreise welche sich unter einem Winkel $=V$ schneiden, und ist der Coordinatenwinkel $=r$, so ist, nach §. 11. des oben genannten Grundrisses,

$$\text{tang}\, V = \pm \frac{\sin r\sqrt{[(ac'-ca')^2+(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2-2(ac'-ca')(bc'-cb')\cos r]}}{aa'+bb'+cc'\sin r^2-(ab'+ba')\cos r},$$

und da im vorliegenden Falle $a=v$, $b=-1$, $c=y'-vx'$, $a'=v'$, $b'=-1$ und $c'=y'-v'x'$ ist, so findet man, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$aa'+bb'+cc'\sin r^2-(ab'+ba')\cos r = \frac{A-2B\cos r+C+G\sin r}{A};$$

ferner ist $ac'-ca'=-(v'-v)y$; $ab'-ba'=(v'-v)$, $bc'-cb'=(v'-v)x$, und es ist also

$$\text{tang}\, V = \frac{\pm 2\sin r\sqrt{(1+x'^2+y'^2-2x'y'\cos r)}.\sqrt{(B^2-AC)}}{A-2B\cos r+C+G\sin r^2};$$

eine Formel, in welcher auch noch für x' und y' die oben angegebenen Werthe substituirt werden können. Bezeichnet man den Abstand des Durchschnittspunctes (x', y') der beiden Hauptkreise vom Anfangspuncte der Coordinaten mit λ, so ist also auch:

$$\text{tang}\, V = \frac{\pm 2.\sqrt{(B^2-AC)}}{A-2B\cos r+C+G\sin r^2}.\frac{\sin r}{\cos\lambda},$$

und es ist dann

$$\text{tang}\,\lambda^2 = \frac{(AE-BD)^2-2(AE-BD)(CD-BE)\cos r+(CD-BE)^2}{(B^2-AC)^2},$$

Sollen die beiden Hauptkreise auf einander senkrecht sein, so hat man die einfache Gleichung

$$A-2B\cos r+C+G\sin r^2 = 0,$$

welche sich, im Falle eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, noch zusammenzieht auf

$$A+C+G = 0.$$

2.

Wenn man von einem Puncte $P=(t, u)$ im Umfange eines sph. Kegelschnitts, dessen Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$

ist, nach den Endpuncten einer Sehne MN, deren Gleichung $mx+ny=1$ sein mag, zwei andere Sehnen PM und PN zieht, und der Kürze wegen setzt:
$\lambda = mt+nu-1$, $p = Au+Bt+D$, $q = Bu+Ct+E$, $r = Du+Et+G$,
so ist, nach einer frühern Abhandlung, die Gleichung des Systemes der beiden zuletzt genannten Sehnen:
$$(Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G)\lambda = 2(py+qx+r)(mx+ny-1),$$
oder auch
$$(A\lambda-2pn)y^2+2(B\lambda-pm-qn)xy+(C\lambda-2qm)x^2+2(Dx-rn+p)y$$
$$+2(E\lambda-rm+q)x+G\lambda+2r = 0.$$
Soll nun das in den Kegelschnitt eingeschriebene Dreieck MPN rechtwinkelig und P der rechte Winkel sein, so hat man, nach dem Vorigen, die Bedingungs-Gleichung
$$A\lambda-2pn+C\lambda-2qm+G\lambda+2r = 0,$$
oder auch $(A+C+G)(mt+nu-1) = 2(pn+qm-r)$, wenn der Coordinatenwinkel $= 90°$ ist.

Nehmen wir nun die beiden Hauptaxen des Kegelschnitts selbst zu Coordinaten-Axen, so hat die Gleichung desselben die einfachere Form
$$1. \quad Ay^2+Cx^2+G = 0,$$
und es ist also $B = D = E = 0$; daher ist $p = Au$, $q = Ct$ und $r = G$, und hiernach verwandelt sich die obige Bedingungs-Gleichung in
$$(A+C+G)(mt+nu-1) = 2(Anu+Cmt-G),$$
oder
$$2. \quad (G+C-A).nu+(G+A-C).mt = A+C-G.$$
Sehen wir nun die Sehne MN als gegeben oder unveränderlich an, so sind m und n ebenfalls gegeben, und indem wir die so eben erhaltene Gleichung mit der Gleichung $Au^2+Ct^2+G=0$ verbinden, sind die Werthe von t und u bestimmt, und also auch die Lage des Punctes P; nur dafs bei dieser Bestimmung eine Zweideutigkeit obwaltet. Daher können über der Sehne MN eines Kegelschnitts nicht mehr als zwei Peripherie-Winkel construirt werden, wenn ein solcher Winkel ein rechter sein soll.

3.

Wenn wir hingegen den Scheitel $P = (t, u)$ des rechten Winkels in der Peripherie des Kegelschnitts festhalten, so kann sich der rechte Winkel um diesen Punct drehen, und die Sehne MN, oder auch die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks MPN, erhält dabei immer andere

und andere Lagen. Um den Durchschnittspunct der Sehne MN mit der consecutiven zu finden, hat man die beiden Gleichungen

$$m+x+ny=1$$

und

$$(G+C-A)nu+(G+A-C).mt=A+C-G$$

dergestalt zu differenziiren, dafs man nur m und n als veränderlich ansieht, wodurch man erhält:

$$xdm+ydn=0,$$

und

$$(G+C-A)udn+(G+A-C)tdm=0;$$

also

$$(G+C-A).\frac{u}{y}=(G+A-C).\frac{l}{\lambda}.$$

Wird aber der Werth $(G+C-A)u=(G+A-C).\frac{ty}{x}$ in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man

$$(G+A-C)nty+(G+A-C)mtx=(A+C-G)x,$$

oder

$$(G+A-C)(ny+mx)t=(A+C-G)x,$$

und, da $ny+mx=1$ ist, so hat man

$$x=\frac{G+A-C}{A+C-G}.t \quad \text{und} \quad y=\frac{G+C-A}{A+C-G}.u.$$

Der hierdurch bestimmte Durchschnittspunct, welcher P' heifsen mag, hängt also nur von der Lage des Punctes P im Umfange des Kegelschnitts ab, und wir haben also das folgende Theorem:

Drehet sich ein in einen Kegelschnitt beschriebenes rechtwinkeliges Dreieck um den Scheitel des rechten Winkels, während die Hypotenuse immer eine Sehne des Kegelschnitts bleibt, so schneiden sich alle diese Hypotenusen immer in einem festen Puncte, welcher sich nur dann ändert, wenn der Scheitel des rechten Winkels auf dem Umfange des Kegelschnitts fortrückt.

Da zu jedem Puncte P ein Punct P' gehört, so gehören die Puncte P' dem Umfange einer Curve an, deren Gleichung leicht zu finden ist, und dadurch erhalten wird, dafs man die Ausdrücke

$$t=\frac{A+C-G}{G+A-C}x \quad \text{und} \quad u=\frac{A+C-G}{G+C-A}y,$$

in der Gleichung $Au^2+Ct^2+G=0$ substituirt. Man erhält dadurch aber

$$\frac{A}{(G+C-A)^2}y^2+\frac{C}{(G+A-C)^2}x^2+\frac{G}{(A+C-G)^2}=0,$$

und hiernach ist die Ortscurve des Punctes P' ebenfalls ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen Kegelschnitte (der Ortscurve des Punctes P) dieselben drei Mittelpuncte und zwar insbesondere denselben inneren Mittelpunct hat. Man kann auch nun leicht aus den Axen des einen Kegelschnitts die Axen des anderen herleiten, womit wir uns aber nicht weiter aufhalten.

Zusatz. Es hält nicht schwer, die reciproken Sätze anzugeben: Wenn man um einen sphärischen Kegelschnitt rechtseitige Dreiecke (solche, deren eine Seite ein Quadrant ist) beschreibt, und die Seite, welche der Quadrant ist, in einem festen, den Kegelschnitt berührenden Hauptkreise fortrückt, so beschreibt der Scheitel des Gegenwinkels einen zweiten Hauptkreis, und wenn dann weiter der erstgenannte Hauptkreis den gegebenen Kegelschnitt umhüllt, so umhüllt der zuletzt genannte Hauptkreis einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen dieselben drei Mittelpuncte hat.

4.

Wenn man von einem Puncte $P=(x', y')$ aus zwei Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, dessen Gleichung

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$$

sein mag, so ist bekanntlich die Gleichung des Systemes dieser beiden Tangenten

$$(B^2-AC)(xy'-yx')^2+2(BD-AE)(y'-y)(xy'-yx')+(D^2-AG)(y'-y)^2$$
$$+2(CD-BE)(x'-x)(xy'-yx')+2(DE-BG)(x'-x)(y'-y)$$
$$+(E^2-GC)(x'-x)^2=0,$$

es mag die Construction eben oder auch sphärisch sein. Diese Gleichung gestattet eine Umformung, welche wichtig ist und neu zu sein scheint, und welche ich hier daher mitzutheilen wage. Man kann nämlich statt der vorstehenden Gleichung die folgende an die Stelle setzen:

$$[Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+G]^2=$$
$$(Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G)(Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+G).$$

Es wird hier hinreichen, durch die Entwickelung dieser Gleichung ihre Übereinstimmung mit der vorigen nachzuweisen. Setzt man zur Abkürzung

$p=Ay+Bx+D$, $q=By+Cx+E$, $r=Dy+Ex+G$, und
$p'=Ay'+Bx'+D$, $q'=By'+Cx'+E$, $r'=Dy'+Ex'+G$,

so ist zunächst

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G = py+qx+r,$$
$$Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+G = p'y'+q'x'+r',$$
$$Ayy'+B(xy'+x'y)+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+G = p'y+q'x+r'$$
$$= py'+qx'+r,$$

und auch

und die zu beweisende Gleichung verwandelt sich also in die folgende:

$$(py'+qx'+r)(p'y+q'x+r') = (py+qx+r)(p'y+q'x+r'),$$

welche durch Entwickelung sich verwandelt in

$$(pq'-qp')(xy'-yx')+(pr'-rp')(y'-y)+(qr'-rq')(x'-x) = 0.$$

Werden aber die Werthe von p, q, r, p', q', r' benutzt, so erhält man

$$pq'-qp' = (B^2-AC)(xy'-yx')+(BD-AE)(y'-y)+(CD-BE)(x'-x),$$
$$pr'-rp' = (BD-AE)(xy'-yx')+(D^2-AG)(y'-y)+(DE-BG)(x'-x),$$
$$qr'-rq' = (CD-BE)(xy'-yx')+(ED-GB)(y'-y)+(E^2-GC)(x'-x),$$

und werden diese Ausdrücke in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man die allgemein bekannte Gleichung für das System der beiden Tangenten. Wir können unsere Gleichung auch auf folgende Art schreiben:

$$[(Ay'+Bx'+D)y+(By'+Cx'+E)x+Dy'+Ex'+G]^2 =$$
$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G)(Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+G)$$
$$= 0.$$

Verbinden wir diese Gleichung des Systemes der beiden Tangenten mit der Gleichung des Kegelschnittes selbst, d. h. setzen wir den Factor

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung der Chordale, welche hier also die Berührungssehne ist, nämlich die Gleichung

$$(Ay'+Bx'+D)y+(By'+Cx'+E)x+Dy'+Ex'+G = 0,$$

und da diese zugleich die Gleichung für die Polare des Punctes P ist, so ist also jene Berührungssehne mit der Polare des Punctes P einerlei, und gerade aus diesem Grnnde läfst sich die Gleichung des Systems der beiden Tangenten also in Factoren zerlegen.

5.

Die gefundene Gleichung vermittelt nun den Übergang zur Auflösung einer anderen analytischen, die Kegelschnitte betreffenden Aufgabe, wovon sowohl in der Planimetrie als in der Sphärik Gebrauch gemacht werden kann.

Es sei $ay+bx+c=0$ die Gleichung einer Sehne eines Kegelschnitts: man soll durch die beiden Endpuncte dieser Sehne Tangenten legen, und die Gleichung des Systemes dieser beiden Tangenten herleiten.

Es sei wieder $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$ die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts, und (x', y') der Durchschnittspunct der beiden Tangenten, so ist

$$(Ay'+Bx'+D)y+(By'+Cx'+E)x+Dy'+Ex'+G=0$$

die Gleichung der Berührungssehne; und wird sie mit der gegebenen Gleichung indentificirt, so erhält man

$$y'=\frac{(E^2-GC)a+(GB-DE)b+(CD-BE)c}{(CD-BE)a+(AE-BD)b+(B^2-AC)c}$$

und

$$x'=\frac{(GB-DE)a+(D^2-GA)b+(AE-BD)c}{(CD-BE)a+(AE-BD)b+(B^2-AC)c},$$

und diese Ausdrücke müssen in der Gleichung

$$(p'y+q'x+r')^2=(py+qx+r)(p'y'+q'x'+r')$$

des Systems der beiden Tangenten substituirt werden. Den gleichen Nenner der beiden Ausdrücke bezeichnen wir mit N, und mit n den Ausdruck $AE^2-2BDE+CD^2+G(B^2-AC)$. Wird die Substitution wirklich vollführt, so erhält man

$$p'=Ay'+Bx'+D=\frac{na}{N};\qquad q'=By'+Cx'+E=\frac{nb}{N}$$

und

$$r'=Dy'+Ex'+G=\frac{nc}{N},$$

und hierdurch verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{n}{N}(ay+bx+c)^2=(py+qx+r)(ay'+bx'+c);$$

die weitere Substitution und Reduction führt endlich zu der Gleichung:

$$[AE^2-2BDE+CD^2+G(B^2-AC)](ay+bx+c)^2$$
$$=(Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G).K,$$

in welcher unter K der constante Factor:

$$K=(E^2-GC)a^2+2(GB-DE)ab+(D^2-GA)b^2+2(CD-BE)ac$$
$$+2(AE-BD)bc+(B^2-AC)c^2$$

verstanden wird. Diese Gleichung für das System der beiden durch die Endpuncte der gegebenen Sehne gehenden Tangenten des Kegelschnitts scheint ebenfalls neu zu sein, und nur ein specieller Fall derselben findet sich in den Lehrbüchern der analytischen Planimetrie und in einer früheren Abhandlung von mir in Bezug auf die Sphärik.

Ist nämlich $a = b = 0$, d. h. ist ein Stück der Cardinale des Coordinaten-Systems selbst die gegebene Berührungssehne, so ist $K = (B^2 - AC).c^2$ und die Gleichung verwandelt sich nun in

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex = \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{B^2 - AC};$$

in der Planimetrie stellt aber diese Gleichung das System der beiden Asymptoten der Hyperbel dar.

Gelegentlich werde ich auf die Anwendungen der vorstehenden allgemeinen Gleichung zurückkommen.

Beweis des Lehrsatzes 28. im zweiten Bande dieses Journals (Seite 190).

(Die Aufnahme ist durch Zufall einige Jahre verspätet.)

Der Lehrsatz heifst:

Wenn irgend ein sphärisches Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 2.) gegeben ist, und man zieht aus seinen Winkeln durch irgend einen Punct P Hauptkreise APA_1, BPB_1, CPC_1, welche die gegenüberliegenden Seiten in A_1, B_1, C_1 treffen, so hat man, wenn M der Pol (das Centrum) und R der Radius des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises ist:

$$\frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin PB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1} = \frac{\cos MP}{\cos R}.$$

Um diesen Satz elementar zu beweisen, ziehe man vom Mittelpuncte der Kugel aus Radien nach den Puncten A, B, C, A_1, B_1, C_1, P, M; von den fünf letzten Radien werde das Sehnendreieck in a', b', c', p, m geschnitten; ferner ziehe man im Sehnendreiecke die geraden Linien Aa', Bb', $C'c$, welche sich in p schneiden, und noch die gerade Linie mp vom Mittelpuncte m des Kreises, nach dem Durchschnittspuncte p. Wird der Mittelpunct der Kugel mit V bezeichnet, so ist offenbar

$$\frac{pb'}{Bb'} = \frac{Vp}{VB} \cdot \frac{\sin PB_1}{\sin BB_1}, \qquad \frac{pa'}{Aa'} = \frac{Vp}{VA} \cdot \frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} \quad \text{und} \quad \frac{pc'}{Cc'} = \frac{Vp}{VC} \cdot \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1};$$

Da nun aber $\frac{pb'}{Bb'} + \frac{pa'}{Aa'} + \frac{pc'}{Cc'} = 1$ und $VA = VB = VC$ ist, so erhält man

$$\frac{\sin PB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1} = \frac{VA}{Vp}.$$

Nun ist aber $Vm = VA \cos R$, und $Vm = Vp . \cos MP$, also ist $\frac{VA}{Vp} = \frac{\cos PM}{\cos R}$, welches dem aufgestellten Satze gemäfs ist.

19.

Sur les pressions exercées par un corps pesant qui repose sur plusieurs appuis.

(Par Mr. *Pagani*, prof. ord. à la faculté des sciences de l'université de Liège.)

Le problème que je me propose d'analyser dans cet écrit a été traité d'une manière ingénieuse par l'illustre *Euler* dans le 18me volume des Nouveaux Commentaires de l'Académie des Sciences de St. Petersbourg. Vers la fin de l'année 1823 je présentai à l'Académie des sciences de Bruxelles un essai sur le même objet où, après avoir établi à priori que *la somme des carrés des pressions doit être un minimun*, je fis voir que ce principe conduisait à l'hypothèse d'*Euler*, et réciproquement.

Problême 1er. Un prisme solide homogène droit s'appuie par sa base sur un plan horizontal supposé inflexible. Au centre de gravité de la base supérieure est appliqué un poids p, incomparablement plus grand que celui du prisme. En désignant par l la distance entre les deux bases du prisme avant l'application du poids p; et par $l-z$, cette distance après la légère compression du prisme produite par le poids p; trouver la relation qui doit exister entre les trois quantités p, l, et z.

Solution. Ce problême présente deux cas selon que l'axe du prisme reste droit ou s'infléchit après la compression.

1er Cas. La relation démandée sera exprimée par l'équation

$$1. \qquad p = \varpi \frac{z}{l},$$

dans laquelle ϖ dénote un poids donné et qui dépend de la nature du prisme et de l'aire de sa base.

2me Cas. Par le centre de gravité de la base du prisme imaginons un axe limité á la périphérie de cette base; et supposons que l'aire totale de la base soit divisée en rectangles infiniment petits par un système de droites perpendiculaires à l'axe. En nommant v l'une quelconque de ces droites, u sa distance au centre de gravité de la base, et π le rapport de la circonférence au diamètre, posons, pour abréger,

$$k^2 = \pi^2 \int v u^2 du,$$

l'intégrale devant s'étendre à la base entière du prisme, et l'axe des u étant choisi de manière que la valeur de k'^2 soit la plus petite possible. Cela posé, on aura d'abord

$$2. \qquad p > \frac{k^2}{l'^2}\varpi = \Pi;$$

ensuite, on trouvera, en négligeant les puissances supérieurs de $\frac{z}{l}$, et en supposant que le prisme conserve toute son élasticité,

$$3. \qquad p = \Pi\left(1 + \frac{2z}{l}\right).$$

On pourra consulter pour la démonstration des formules (1.), (2.) et (3.) le Traité de mécanique de Mr. *Poisson*, tome 1er page 611. et suivantes.

Problème 2me. Une table horizontale inflexible est supportée par un nombre quelconque d'appuis prismatiques verticaux et homogènes. On applique à un point déterminé de la table un poids donné, et l'on demande quelle sera la pression exercée par ce poids sur un appui quelconque.

Solution. Supposons d'abord que tous les appuis soient légèrement comprimés et que leurs axes restent droits et verticaux. Il est évident que les extrémités supérieures de ces axes, qui d'abord étaient situées sur un plan horizontal, se trouveront, après la compression des appuis, sur un plan dont l'équation pourra s'exprimer de cette manière:

$$z = \lambda + \mu x + \nu y;$$

le plan des x, y, étant le plan horizontal dont nous venons de parler, et les ordonnées z étant dirigées dans le sens de la pesanteur. Il est évident en outre, qu'en désignant par x, y, les co-abscisses de l'extrémité supérieure de l'axe d'un appui quelconque, et par p la pression supportée par cet appui, on aura, d'après la formule (1.),

$$4. \qquad p = \frac{\varpi}{l}(\lambda + \mu x + \nu y).$$

Soit dont P le poids qui répose sur la table, et α, β, les co-abscisses de son point d'application; on devra avoir, pour l'équilibre du système

$$5. \quad \begin{cases} \lambda S\frac{\varpi}{l} + \mu S\frac{\varpi x}{l} + \nu S\frac{\varpi y}{l} = P, \\ \lambda S\frac{\varpi x}{l} + \mu S\frac{\varpi x^2}{l} + \nu S\frac{\varpi xy}{l} = \alpha P, \\ \lambda S\frac{\varpi y}{l} + \mu S\frac{\varpi xy}{l} + \nu S\frac{\varpi y^2}{l} = \beta P. \end{cases}$$

Dans ces équations, la lettre S denote une somme qui doit s'étendre à toutes les extrémités supérieures des axes des appuis. En déterminant les valeurs des constantes λ, μ, ν au moyen des équations (5.) et en les substituant dans la formule (4.), on aura la pression demandée.

Si tous les appuis sont identiques, le rapport $\frac{\varpi}{l}$ est constant, et les formules (5.) conduisent à l'hypothèse admise par *Euler*.

Dans le cas général, on aura l'expression la plus simple de la pression p en fixant l'origine des coordonnées au centre de gravité des poids $\frac{\varpi}{l}$, etc., appliqués aux extrémités supérieures des axes des appuis, et en prenant les axes principaux de ce système de poids pour ceux des x et des y. En effet, les équations (5.) se réduisent alors simplement aux suivantes:

$$\lambda S\frac{\varpi}{l} = P, \qquad \mu S\frac{\varpi}{l}x^2 = \alpha P, \qquad \nu S\frac{\varpi}{l}y^2 = \beta P.$$

Partant

$$p = \frac{\varpi}{l}P\left(\frac{1}{S\frac{\varpi}{l}} + \frac{\alpha x}{S\frac{\varpi x^2}{l}} + \frac{\beta y}{S\frac{\varpi y^2}{l}}\right).$$

Remarque. La solution donnée par les équations (4.) et (5.) sera légitime si aucune des valeurs de p ne satisfait à la condition (2.). Il importe d'observer aussi que les valeurs négatives de p ne peuvent convenir que dans le cas où les appuis auxquels elles se rapportent ont les deux extrémités fixes; et alors la compression est changée en extension. Dans le cas contraire il faut recommencer le calcul à l'aide des équations (5.) en faisant abstraction de tous les appuis pour lesquels on aurait trouvé une pression négative et s'assurer si les conditions d'équilibre peuvent être satisfaites; ce qui fera connaître les véritables pressions des autres appuis. Dans tous les cas, si une ou plusieurs valeurs de p remplissent la condition (2.), il faudra dans les équations de l'équilibre, savoir

$$6. \qquad Sp = P, \qquad Spx = \alpha P, \qquad Spy = \beta P,$$

substituer à la place de la lettre p, les expresions données par la formule (3.), c'est-à-dire

$$7. \qquad p = \Pi\left(1 + \frac{2}{l}(\lambda + \mu x + \nu y)\right).$$

Pour montrer une application de nos formules, je supposerai que le poids P est supporté par quatre appuis égaux et que l'un d'eux éprouve une légère flexion.

L'origine des coordonnées étant placée au centre de gravité des poids 2Π, ϖ, ϖ, ϖ, respectivement appliqués aux points (x, y), (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''); si dans les formules (6.) mises sous cette forme

$$\begin{aligned} p + p' + p'' + p''' &= P, \\ px + p'x' + p''x'' + p'''x''' &= \alpha P, \\ py + p'y' + p''y'' + p'''y''' &= \beta P, \end{aligned}$$

on fait

$$\begin{aligned} p &= \Pi[1 + 2(\lambda + \mu x + \nu y)], \\ p' &= \varpi(\lambda + \mu x' + \nu y'), \\ p'' &= \varpi(\lambda + \mu x'' + \nu y''), \\ p''' &= \varpi(\lambda + \mu x''' + \nu y'''), \end{aligned}$$

et si l'on suppose que les axes des x, y sont les axes principaux du système de poids 2Π, ϖ, ϖ, ϖ; on aura:

$$\begin{aligned} (3\varpi + 2\Pi)\lambda &= P - \Pi, \\ [\varpi(x'^2 + x''^2 + x'''^2) + 2\Pi x]\mu &= \alpha P - \Pi x, \\ [\varpi(y'^2 + y''^2 + y'''^2) + 2\Pi y]\nu &= \beta P - \Pi y, \end{aligned}$$

En substituant dans les formules précédentes, les valeurs des coëfficiens λ, μ, ν, données par les dernières équations, on connaîtra les pressions cherchées.

Théorême. Dans l'ypothèse d'*Euler*, la somme des carrés des pressions supportées par des appuis en nombre quelconque, est un *minimum*.

Démonstration. Il suffit de prouver que, si le nombre des variables p est plus grand que (3.), les équations (6.) étant satisfaites par l'expression générale

$$p = \lambda + \mu x + \nu y,$$

dans laquelle λ, μ, ν, sont des constantes, on doit avoir

$$S p dp = 0.$$

Pour cela, différentions par rapport à p, les équations (6.); nous aurons

$$S dp = 0, \qquad S x dp = 0, \qquad S y dp = 0.$$

Multiplions ces dernières équations, respectivement par λ, μ, et ν; en ajoutant les produits, et en ayant égard á la valeur générale de p, on trouvera

$$S p dp = 0;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Liège le 12. Août 1834.

20.

Neue und directeste Methode, aus den gemessenen Höhen zweier bekannter Sterne und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe zu finden.

(In Folge des Aufsatzes 34. im zweiten Bande dieses Journals S. 345.)

(Von den Herrn Prof. Dr. *Gudermann*, zu Münster.)

Diese, nach einem Berichte und Auszuge in Zach's *Corresp. astron.*, zuerst von Gaufs in einem Göttinger Universitäts-Programme behandelte Aufgabe ist auch in Littrow's theoretische und practische Astronomie übergegangen. Die zahlreichen früheren und späteren Behandlungen ähnlicher, und von der genannten nur wenig verschiedener Aufgaben, und das Bestreben, eine vorzüglich für Schiffer bequeme Auflösung zu ermitteln, haben dieser Aufgabe ein besonderes Interesse gegeben. Die nachstehende directe Auflösnng enthält in ihrer Endformel nur eine einzige, in der Construction nachgewiesene Hülfs-Gröfse, welche auf vielerlei Arten berechnet werden kann, und gestattet überhaupt eine bequeme Anwendung des logarithmischen Calculs.

Es seien h und h' die gemessenen Höhen der beiden Sterne S und S'; ihre Declinationen seien d und d'; der Pol heifse P und das Zenith Z. Die beiden Dreiecke PSS' und ZSS' haben die Seite SS' gemein, und der Winkel SPS' im ersten Dreiecke, welcher durch θ bezeichnet wird, kann aus dem Unterschiede der Rectascensionen und aus der Zwischenzeit der Beobachtungen leicht gefunden werden; der Hauptbogen PZ, welcher die Scheitel der beiden Dreiecke verbindet, ist das Complement der gesuchten Polhöhe φ.

Da zwei Seiten $90°-d$ und $90°-d'$ sammt dem eingeschlossenen Winkel θ des Dreiecks SPS' gegeben sind, so kann hieraus die dritte Seite k dieses Dreiecks nach bekannten Regeln gefunden werden; es ist z. B.

$$\cos k = \sin d \sin d' + \cos d \cos d' \cos \theta;$$

und diese Gröfse k ist die vorhin erwähnte Hülfs-Gröfse. Ist M die Mitte von SS', und zieht man noch MP und MZ, so ist

$$\cos MP = \frac{\sin d' + \sin d}{2\cos\frac{k}{2}}, \qquad \sin MP . \cos PMS' = \frac{\sin d' - \sin d}{2\sin\frac{k}{2}}, \text{ und eben so}$$

$$\cos MZ = \frac{\sin h' + \sin h}{2\cos\frac{k}{2}}, \qquad \sin MZ . \cos ZMS' = \frac{\sin h' - \sin h}{2\sin\frac{k}{2}}.$$

Werden endlich von P und Z die Perpendikel Pp und Zz auf SS' gefällt, so ist

$$\sin MP . \sin PMS' = \sin Pp \quad \text{und} \quad \sin MZ . \sin ZMS = \sin Zz.$$

Da der Winkel $PMZ = PMS' \mp ZMS'$, und also

$$\cos PMZ = \cos PMS' \cos ZMS' \pm \sin PMS' \sin ZMS' \text{ ist,}$$

so erhält man aus den vier vorigen Ausdrücken sogleich:

$$\sin PM.\sin ZM\cos PMZ = \frac{(\sin d' - \sin d)(\sin h' - \sin h)}{4\sin\frac{k^2}{2}} \pm \sin Pp.\sin Zz.$$

Da aber $\sin\varphi = \cos PZ = \cos PM\cos ZM + \sin PM.\sin ZM\cos PMZ$ ist, so entsteht die Formel

$$\sin\varphi = \frac{(\sin d'+\sin d)(\sin h'+\sin h)}{4\cos\frac{k^2}{2}} + \frac{(\sin d'-\sin d)(\sin h'-\sin h)}{4\sin\frac{k^2}{2}} \pm \sin Pp.\sin Zz.$$

Setzen wir weiter $\triangle = \sqrt{[\cos s.\cos(s-k).\sin(s-h).\sin(s-h')]}$, worin $s = \frac{h'+h+k}{2}$ ist, so ist bekanntlich $\sin Zz = \frac{2\triangle}{\sin k}$, und da $\sin Pp = \frac{\cos d\cos d'\sin\theta}{\sin k}$ ist, so ist, nach der Substitution dieser Werthe, die obige Formel:

$$\sin\varphi = \frac{(\sin d'+\sin d)(\sin h'+\sin h)}{4\cos\frac{k^2}{2}} + \frac{(\sin d'-\sin d)(\sin h'-\sin h)}{4\sin\frac{k^2}{2}} \pm \frac{2\triangle\cos d\cos d'\sin\theta}{\sin k^2}.$$

Die numerische Rechnung ist am bequemsten, wenn man der Formel die folgende Gestalt giebt:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\left(\frac{d'+d}{2}\right)\cos\left(\frac{d'-d}{2}\right)\sin\left(\frac{h'+h}{2}\right)\cos\left(\frac{h'-h}{2}\right)}{\cos\frac{k^2}{2}} + \frac{\cos\left(\frac{d'+d}{2}\right)\sin\left(\frac{d'+d}{2}\right)\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)}{\sin\frac{k^2}{2}}$$
$$\pm \frac{2\triangle.\cos d\cos d'.\sin\theta}{\sin k^2}.$$

Man findet hiernach also die gesuchte Polhöhe, ohne die Zeit der Beobachtung, oder die Winkel ZPS und ZPS' vorher berechnet zu haben; was nach der Gaufsischen Auflösung nicht angeht.

Um die Brauchbarkeit dieser Formel besser beurtheilen zu können, wähle ich als Beispiel die Berechnung der Polhöhe von Göttingen. Nach Littrow's Astronomie I. Theil S. 183 war

$h' = 50°\ 3'\ 38''70$; $d' = 20°\ 10'\ 56''02$; $\theta = 76°\ 16'\ 22''62$.
$h = 33°\ 33'\ 0''60$; $d = 8°\ 22'\ 35''45$;

Die umständlich angegebene Rechnung ist nun:

$\log\sin d = 9{,}1633923$	$\log\cos d = 9{,}9953421$		
$\log\sin d' = 9{,}5378280$	$\log\cos d' = 9{,}9724806$		
	$\log\cos\theta = 9{,}3752918$	$\log\sin\theta = 9{,}9874148.$	
	$8{,}7012203$	$9{,}3421145$	
Zahl $= 0{,}0502598$	$+$	$0{,}2203507$, also $\cos k = 0{,}2706105$,	
		und $k = 74°\ 17'\ 57''84.$	

$$\cos\frac{k^2}{2} = \frac{1+\cos k}{2} = 0{,}6353052, \qquad \log\cos\frac{k^2}{2} = 9{,}8029824,$$
$$\sin\frac{k^2}{2} = \frac{1-\cos k}{2} = 0{,}3646947, \qquad \log\sin\frac{k^2}{2} = 9{,}5619294,$$
$$\log 4 = 0{,}6020600,$$
$$\log\sin k^2 = 9{,}9669718.$$

$s = 78^\circ\,57'\,18''\,27$, $\log\cos s = 9{,}2823470$,
$s-k = 4^\circ\,39'\,20''\,43$, $\log\cos(s-k) = 9{,}9985647$,
$s-h = 45^\circ\,24'\,18''\,27$, $\log\sin(s-h) = 9{,}8525338$,
$s-h' = 28^\circ\,53'\,39''\,57$, $\log\sin(s-h') = 9{,}6841230$,

$18{,}8175685$,

$\log\triangle = 9{,}4087842$.

$\log\cos\frac{d'-d}{2} = 9{,}9976911$, $\log\sin\frac{d'-d}{2} = 9{,}0121710$, $\log\triangle = 9{,}4087842$,
$\log\sin\frac{d'+d}{2} = 9{,}3920813$, $\log\cos\frac{d'+d}{2} = 9{,}9863706$, $\log 2 = 0{,}3010300$,
$\log\cos\frac{h'-h}{2} = 9{,}9954763$, $\log\sin\frac{h'-h}{2} = 9{,}1571103$, $\log\cos d = 9{,}9953421$,
$\log\sin\frac{h'+h}{2} = 9{,}8238669$, $\log\cos\frac{h'+h}{2} = 9{,}8723973$, $\log\cos d' = 9{,}9724806$,
$\log\sin\theta = 9{,}9874148$,

$9{,}2091156$, $8{,}0280492$, $9{,}6650517$,
$\log\cos\frac{k^2}{2} = 9{,}8029824$, $\log\sin\frac{k^2}{2} = 9{,}5619294$, $\log\sin k^2 = 9{,}9669718$,

$9{,}4061332$, $8{,}4661198$, $9{,}6980799$,
Zahl $= 0{,}2547612$. Zahl $= 0{,}0292496$. Zahl $= 0{,}4989764$.

$0{,}2547612$,
$+0{,}0292496$,
$\pm 0{,}4989764$,

Also entweder $\sin\varphi = +0{,}7829872$,
oder $\sin\varphi = -0{,}2149656$.

Der letzte Werth giebt eine negative Polhöhe, und ist hier unzulässig: der erste aber giebt die Göttinger Polhöhe

$$\varphi = 51^\circ\,32'\,5'',64.$$

In Littrow's Astronomie wird die Göttinger Polhöhe nach zwei verschiedenen Methoden berechnet; die eine Berechnung giebt $\varphi = 51^\circ\,32'\,5''\,53$, die andere aber $\varphi = 51^\circ\,32'\,5''\,69$; unser nach den Tafeln von Schulze berechnetes Resultat liegt also zwischen den beiden hier angegebenen.

Münster, den 9ten März 1834.

20.

Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\sqrt{(a^2-b^2)}$ etc.

(Par Mr. *J. V. Poncelet*, chef de Bataillon du Génie.)

Expression linéaire $\sqrt{(a^2+b^2)}$ depuis $a=kb$, jusqu'à $a=\infty b$; limite de l'erreur.

La valeur approchée du radical $\sqrt{(a^2+b^2)}$ devant être rationnelle et linéaire en a et b, nous ferons

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = \alpha a+\beta b$$

a et b étant des nombres absolus et positifs, α et β des nombres indéterminés qui doivent satisfaire à la condition que, dans une étendue donnée, par exemple, depuis $a=kb$, jusqu'à $a=\infty$ ou $b=0$, l'erreur commise en prenant $\alpha a+\beta b$ au lieu de $\sqrt{(a^2+b^2)}$, soit la moindre possible par rapport à la véritable valeur du radical. L'erreur absolue étant $\alpha a+\beta b-\sqrt{(a^2+b^2)}$, l'erreur proportionnelle ou relative que nous nommerons z, sera, en fesant

$$\frac{a}{b}=n \text{ ou } a=nb, \qquad z=\frac{\alpha a+\beta b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}-1=\frac{\alpha n+\beta}{\sqrt{(1+o^2)}}-1,$$

et il s'agira de la rendre un minimum pour toutes les grandeurs de a et de b ou de n, comprises dans l'intervalle considéré ($n=k$ à $n=\infty$), en disposant convenablement des indéterminées α et β; ce qui revient, au fond, à choisir ces quantités numériques de manière que le cours de la courbe qui aurait n pour abscisses et z pour ordonnées respectives, s'approche le plus qu'il est possible de l'axe des n dans l'étendue comprise depuis $n=k$ jusqu'à $n=\infty$.

Pour cela, il est nécessaire d'étudier la marche de la fonction z entre les deux limites où l'on doit calculer les valeurs de $\sqrt{(a^2+b^2)}$. Or, il est aisé de s'assurer que de $n=0$ à $n=\infty$, z est susceptible d'un maximum absolu à partir duquel l'erreur décroit constamment et indéfiniment sous le point de vue algèbrique, c'est-à-dire, en passant par zéro et devenant négative; ou, ce qui revient au même, l'erreur, à partir de ce maximum décroit continuellement jus'qu'à devenir nulle pour croître ensuite en-dessous de l'axe des abscisses, en prenant des valeurs de signe contraire.

En effet, si l'on considère les nombres α et β comme donnés, et que l'on différentie deux fois de suite, la valeur ci-dessus de z par rapport à n; qu'on égale enfin à zéro le coëfficient différentiel du premier ordre pour avoir la valeur de n qui répond au maximum de l'erreur, on trouvera que les conditions de ce maximum sont satisfaites pour

$$n = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad z = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} - 1.$$

Recherchant, en outre, les expressions de l'erreur z qui répondent aux deux limites considérées, on trouve

$$\text{pour } n = k, \qquad z = \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{(1+k^2)}} - 1,$$

$$\text{pour } n = \infty, \qquad z = \alpha - 1.$$

Si donc on était certain, à priori, que le maximum ci-dessus se trouve situé entre ces limites, pour les valeurs cherchées de α et β, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est essentiellement positif et plus grand que k, il ne resterait qu'à déterminer ces valeurs de manière à rapprocher le plus qu'il est possible de 0, les expressions algébriques des trois erreurs dont il s'agit, c'est-à-dire, de manière que la plus grande d'entre elles, prise abstraction faite du signe, soit la moindre possible; ce qui serait facile puisqu'il ne s'agirait, comme on va le voir, que d'exprimer que les valeurs absolues de ces premières erreurs sont précisément égales. Mais comme la limite du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ nous est absolument inconnue, il devient indispensable de faire des suppositions particulières sur les valeurs des indéterminées α et β. Supposant, par exemple, qu'elles doivent rendre nulles les erreurs relatives aux limites $n = \infty$, $n = k$, on aura

$$\alpha - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 1; \quad \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{(1+k^2)}} - 1 = 0;$$

$$\text{d'où} \quad \beta = \sqrt{(1+k^2)} - \alpha k = \sqrt{(1+k^2)} - k.$$

Or, on s'assure aisément que le rapport

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)} - k} = \sqrt{(1+k^2)} + k$$

est ici, en effet, plus grand que k, de sorte que l'erreur maximum

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} - 1$$

est réellement située dans l'intervalle compris entre $n = k$ et $n = \infty$; ce qui ne peut être à moins que les erreurs relatives aux valeurs particulières $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{(1+k^2)} - k$, qui sont positives et que nous nommerons

α' et β', n'aillent sans cesse en croissant à partir, soit de la limite inférieure $n = k$, soit de la limite supérieure $n = \infty$, jusqu'à la valeur maximum $\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}-1$, qui est également positive.

D'ailleurs, la fonction $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-1$ tendant à diminuer à mesure que l'on y substitue des valeurs de α et de β de plus en plus petites par rapport à α' et à β', il est clair que, bien qu'elles fassent croître, dans le sens négatif, les erreurs $\alpha-1$ et $\frac{\alpha k+\beta}{\sqrt{(1+k^2)}}-1$ relatives aux limites $n=\infty$, $n=\alpha$, elles seront plus avantageuses que celles α' et β', tant que ces dernières erreurs, prises avec un signe contraire, demeureront au-dessous de l'erreur maximum $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-1$ correspondante. Mais, comme, au contraire, elles cesseraient de l'être dès l'instant où cette dernière viendrait à être surpassée par l'une ou l'autre d'entre elles, on voit que les valeurs de α et de β, qui répondent aux plus petites erreurs possibles pour tout l'intervalle compris depuis $n=k$ jusqu'à $n=\infty$, doivent satisfaire à la double condition

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-1=1-\alpha=1-\frac{\alpha k+\beta}{\sqrt{(1+k^2)}},$$

de laquelle on tire d'abord

$$\beta=\alpha[\sqrt{(1+k^2)}-k],$$

expression qui montre qu'en effet, le rapport

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{(1+k^2)}-k}=\sqrt{(1+k^2)}+k$$

est plus grand que k; de sorte que le maximum $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-1$ de l'erreur se trouve réellement situé dans l'intervalle compris entre les limites $n=k$ et $n=\infty$, comme le supposent les raisonnement qui précèdent.

On tirera ensuite, des mêmes équations de condition,

$$\alpha=\frac{1}{1+\sqrt{[2(1+k^2)-2k\sqrt{(1+k^2)}]}},\qquad \beta=\frac{2[\sqrt{(1+k^2)}-k]}{1+\sqrt{[2(1+k^2)-2k\sqrt{(1+k^2)}]}};$$

et partant, pour l'expression de la limite ε des erreurs que l'on risque de commettre en prenant

$$\sqrt{(a^2+b^2)}=\alpha a+\beta b,$$

$$1-\alpha=1-\frac{\alpha k+\beta}{\sqrt{(1+k^2)}}=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-1=\frac{\sqrt{[2(1+k^2)-2k\sqrt{(1+k^2)}]}-1}{\sqrt{[2(1+k^2)-2k\sqrt{(1+k^2)}]}+1}=\varepsilon.$$

Exemples particuliers.

Supposons, par exemple, que l'on ne connaisse nullement l'ordre de grandeur de a et de b, c'est-à-dire, si a surpasse b ou en est sur-

passé; les limites entre lesquelles il faudra prendre les valeurs de $\sqrt{(a^2+b^2)}$ seront ainsi $n=0$ et $n=\infty$; de sorte qu'on devra faire $k=0$ dans les expressions ci-dessus de α, β et ε, qui deviendront respectivement

$$\alpha=\beta=0{,}8284, \qquad \varepsilon=0{,}1716.$$

On aura donc, à moins de 0,1716, ou environ $\frac{1}{6}$ près

$$\sqrt{(a^2+b^2)}=0{,}83(a+b)$$

quelles que soient les valeurs positives de a et de b; le maximum 0,1716 des erreurs proportionnelles et positives ayant lieu pour n ou $\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}=1$, et celui des erreurs négatives pour $n=0$ et $n=\infty$, ou $a=0$ et $b=0$.

Supposant pareillement que l'on sache que a doive surpasser b, ou n l'unité, on aura $k=1$ et $\alpha=0{,}96046$, $\beta=0{,}39783$, $\varepsilon=0{,}03954<\frac{1}{25}$: cette limite ε des erreurs positives et négatives, étant précisément atteinte pour les valeurs $n=1$, $n=\infty$ et $n=\frac{\alpha}{\beta}=2{,}44$, ou $a=b$, $a=\frac{b}{0}$ et $a=2{,}446$.

On voit, d'après cela, que les valeurs rationnelles $\alpha a+\beta b$ de $\sqrt{(a^2+b^2)}$ sont d'autant plus approchées que a devient plus grand par rapport à b; c'est ce que confirme le tableau suivant, dont le calcul est dû à Mr. le Capitaine du Génie *Gosselin*.

Tableau des valeurs numériques des coëfficients de la fonction linéaire $\alpha a+\beta b$ et des limites de l'erreur.

Relations de a et de b.	Valeurs de k.	Valeurs de α.	Valeurs de β.	Limites de l'erreur ou valeurs de $1-\alpha$.	Valeurs approchées de $\sqrt{(a^2+b^2)}$.
a et b quelconques	0	0,82840	0,82840	0,17160 ou $\frac{1}{6}$	$0{,}8284(a+b)$
$a>b$	1	0,96046	0,39783	0,03954 ou $\frac{1}{25}$	$0{,}96046.a+0{,}39783.b$
$a>2.b$	2	0,98592	0,23270	0,01408 ou $\frac{1}{71}$	$0{,}98592.a+0{,}23270.b$
$a>3.b$	3	0,99350	0,16123	0,00650 ou $\frac{1}{154}$	$0{,}99350.a+0{,}16123.b$
$a>4.b$	4	0,99625	0,12260	0,00375 ou $\frac{1}{260}$	$0{,}99625.a+0{,}12260.b$
$a>5.b$	5	0,99757	0,09878	0,00243 ou $\frac{1}{417}$	$0{,}99757.a+0{,}09878.b$
$a>6.b$	6	0,99826	0,08261	0,00174 ou $\frac{1}{589}$	$0{,}99826.a+0{,}08261.b$
$a>7.b$	7	0,99875	0,07098	0,00125 ou $\frac{1}{800}$	$0{,}99875.a+0{,}07098.b$
$a>8.b$	8	0,99905	0,06220	0,00095 ou $\frac{1}{1049}$	$0{,}99905.a+0{,}06220.b$
$a>9.b$	9	0,99930	0,05535	0,00070 ou $\frac{1}{1428}$	$0{,}99930.a+0{,}05535.b$
$a>10.b$	10	0,99935	0,04984	0,00065 ou $\frac{1}{1538}$	$0{,}99935.a+0{,}04984.b$

Simplification des calculs numériques des coëfficients α et β et de l'erreur limite ε, au moyen des tables de logarithmes.

On facilitera beaucoup le calcul numérique des valeurs de α, β et ε en posant

$$k = \cot 4\varphi \quad \text{ou} \quad \varphi = \tfrac{1}{4}\operatorname{arc}(\cot = k) = \tfrac{1}{4}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{1}{k}\right);$$

il viendra, en effet,

$$\alpha = 1 - \operatorname{tang}^2\varphi, \qquad \beta = 2\operatorname{tang}\varphi, \qquad \varepsilon = \operatorname{tang}^2\varphi$$

expressions que l'on calculera sur le champ au moyen des tables trigonométriques, en déterminant d'abord l'angle 4φ dont le logarithme de la tangente doit être égal à

$$10 - \log k,$$

puis successivement les valeurs de φ, $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}^2\varphi$.

Supposant, par exemple, $k = 3$, on aura, d'après ces tables,

$$\log\operatorname{tang} 4\varphi = 10 - \log 3 = 9{,}52287875 = \log\operatorname{tang}(18^0 - 26' - 7'',065);$$

d'où

$$\varphi = 4^0 - 36' - 31'',766, \quad \log\operatorname{tang}\varphi = 8{,}9064056, \quad \operatorname{tang}\varphi = 0{,}0806131,$$

en ayant soin de retrancher 10 de la caractéristique de $\log\operatorname{tang}\varphi$, qui représente le logarithme du rayon supposé divisé en dix billions de parties égales, dans les tables.

On aura donc aussi, en ayant cette attention,

$$\log\operatorname{tang}^2\varphi = 2\log\operatorname{tang}\varphi = 3{,}8128112 = \log 0{,}00649847,$$

et finalement

$$\varepsilon = 0{,}0064985, \quad \beta = 2\operatorname{tang}\varphi = 0{,}1612262, \quad \alpha = 1 - \operatorname{tang}^2\varphi = 0{,}993502:$$

valeurs qui sont précisément celles qu'indique la table ci-dessus pour $k = 3$.

Extension dont est susceptible la méthode précédente pour des fonctions complexes quelconques.

La marche par laquelle nous sommes arrivés aux expressions générales de α, β et ε en k ou φ peut évidemment s'appliquer à toute espèce de fonction complexe des deux variables a et b, qu'il s'agirait de remplacer par sa valeur linéaire et approchée de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma$, pourvu que l'expression analytique de l'erreur proportionnelle qui résulte de cette substitution fût susceptible d'un maximum ou d'un minimum dans l'intervalle où l'on veut considérer les valeurs des variables a et b. Cette méthode s'étendrait même aisément, pour certains cas, à une fonction d'un nombre quelconque de variables a, b, c, d, etc., en se basans sur des

considérations analogues à celles par lesquelles *Laplace* et *Fourier* sont parvenus à découvrir les valeurs des inconnues d'une suite d'équations de condition, de manière que la plus grande des erreurs auxquelles elles conduisent, quand on y substitue à la place des inconnues les valeurs données par l'expérience, soit, abstraction faite du signe, la moindre possible *). En effet, toute la difficulté consistera à découvrir, dans chaque cas, l'expression analytique des limites de l'erreur qu'on risque de commettre; à les égaler ensuite entre elles abstraction faite du signe; ce qui, lorsque le nombre des équations ainsi obtenues sera égal au nombre des indéterminées α, β, γ, etc., permettra de calculer les valeurs de celles-ci qui satisfont aux conditions du problème.

Ces observations montrent suffisamment que la méthode peut s'appliquer à une infinité de circonstances, et offre ainsi les moyens de remplacer, quand la chose est en soi possible, toute fonction complexe de variables quelconques par une autre fonction plus simple et qui se prête plus facilement au calcul ou à certaines transformations analytiques. L'exemple qui précède pourra d'ailleurs servir à faire pressentir la nature des moyens qui doivent être mis en oeuvre dans chaque cas particulier, et les avantages que ce procédé peut avoir, dans certaines questions, sur ceux ordinairement mis en usage, et qui consistent dans le développement des fonctions en série ou en fractions continues.

Considérations géométriques propres à arriver au même bût.

Maintenant nous ferons remarquer qu'il se présente divers moyens, essentiellement fondés sur des considérations géomètriques, et qui sont propres à atteindre le but désiré par une voie pour ainsi dire purement intuitive.

En effet, reprenant la question ci-dessus, nommant c la valeur exacte du radical $\sqrt{(a^2+b^2)}$, et considérant les quantités variables a, b et c comme les coordonnées d'un certain point, dans l'espace, pris par rapport aux axes rectangulaires $o\,a$, $o\,b$, $o\,c$ (Tab. III. Fig. 1.), il est clair que l'équation

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = c, \quad \text{ou} \quad a^2+b^2=c^2$$

*) Mecanique celeste, 2e édition, tom. II., pag. 126 et suivantes. Analyses des équations, par *Fourier*, 1ère partie, pag. 81, No. 21.

représentera une surface conique à base circulaire, ayant son sommet à l'origine o, pour axe, l'axe oc que nous supposerons vertical, et pour angle générateur, un demi-droit ou 45°. De même l'équation

$$c = \alpha a + \beta b$$

représentera, dans les coordonnées c, a, b, un plan passant par l'origine o, qui sert de sommet au cône; de sorte que la question proposée revient précisément à déterminer les constantes arbitraires α et β qui entrent dans l'équation du plan, de manière que les ordonnées verticales c de ce plan diffèrent le moins qu'il est possible, pour une étendue donnée, de celles qui leur correspondent sur le cône et appartiennent à une même verticale, c'est-à-dire, aux mêmes valeurs de a et de b prises dans l'intervalle pour lequel la plus petite valeur de $\frac{a}{b} = k$ et la plus grande $= \infty$, ce qui se rapporte à l'espace compris depuis l'axe des a jusqu'à la droite om, formant avec cet axe, l'angle nom dont k est la cotangente.

Nommant donc ψ cet angle, ou fesant

$$mon = \psi = \text{arc}\,(\cot = k) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{k}\right),$$

tous les points de la surface conique et du plan à considérer, seront compris entre les génératrices et les droites respectives qui ont oa et om pour projections sur le plan de ab.

Supposons qu'on fasse, dans le premier plan et dans cette surface, un profil quelconque passant par l'axe oc. Soit (Fig. 2.) op'' la trace du premier, op' celle de la seconde sur ce profil, od celle du plan des ab; considérons la verticale qui répond au point quelconque p de od, elle rencontrera la trace op'' du plan en un point p'', et celle de la surface en un point p'; l'erreur absolue, commise en prenant pp'' pour pp' sera $p'p''$, et l'erreur relative ou proportionnelle $\frac{p'p''}{pp'}$: c'est cette erreur qui doit être rendue la plus petite possible dans toutes les positions du profil autour de l'axe oc.

On voit que le rapport $\frac{p'p''}{pp'}$ est indépendant de la position de p sur l'horizontale od, de sorte que, par exemple, il suffit de considérer tous les points p' de la surface conique qui appartiennent à un même plan de niveau $o'p'$, coupant cette surface suivant un cercle dont la projection sur le plan des ab (Fig. 1.), est représenté par l'arc mpn comprenant

tous les points p à considérer, et dont l'intersection avec le plan qui a pour équation $c = \alpha a + \beta b$, est représentée, dans cette même projection, par la droite rs, je suppose, limitée également aux côtés de l'angle mon qui comprend tous les points p. Mais q' étant, dans le profil ci-dessus (Fig. 2.), le point du plan $e = \alpha a + \beta b$ qui se trouve situé à la même hauteur que le point p' de la surface conique par rapport à od ou au plan des ab; de plus q étant, sur ce dernier, la projection de q' comme p l'est de p', on a évidemment

$$\frac{p'p''}{pp'} = \frac{pq}{oq};$$

donc la droite rs (Fig. 1.), qui appartient au plan cherché et dont l'équation est

$$c = \alpha a + \beta b,$$

doit être choisie de façon que, dans l'étendue comprise depuis on jusqu'à om, elle se rapproche le plus possible de l'arc de cercle npm, en ce sens que la plus grande valeur du rapport des intervalles $pqaoq$, mesurés sur les différens rayons vecteurs op compris dans l'angle mon, soit la plus petite possible sans égard aux signes de position de pq et de oq.

D'ailleurs il est à remarquer que ces raisonnement sont indépendans de la nature particulière de la courbe mpn, ou de la fonction en a et b considérée, pourvu seulement qu'en égalant cette dernière à c, l'équation qui en résulte soit celle d'un cône ayant l'origine des coordonnées a, b, c pour sommet, ou, ce qui revient au même, soit homogène en ces coordonnées.

Cela posé, il parait évident, à priori, que si la portion de courbe mpn est susceptible d'être renfermée entre deux droites parallèles suffisamment rapprochées, le problème proposé pourra être résolu, sans difficulté et d'une manière satisfaisante, en déterminant le système de ces parallèles qui offre le plus petit écartement possible, et prenant, pour la droite rs représentée par l'équation $c = \alpha a + \beta b$, celle qui partage en deux parties égales l'intervalle dont il s'agit. Notamment si la courbe mpn est partout convexe depuis n jusqu'à m, la position la plus avantageuse de rs sera évidemment comprise entre celle de la corde mn et de la tangente parallèle $m'n'$, et elle correspondra nécessairement à la droite $n''m''$ qui divise en deux parties égales l'intervalle de nm à $n'm'$, de sorte que les trois limites

$$\frac{nn''}{n''o}, \quad \frac{pp''}{p''o}, \quad \frac{m''o}{m''o}$$

des erreurs positives ou négatives qu'on risque de commettre en remplaçant la courbe par la droite, sont, abstraction faite du signe, égales entre elles. *)

Appliquant ces resultats au cas particulier du cercle ou de la fonction $\sqrt{(a^2+b^2)}$, et remarquant que l'angle de $n''m''$ ou, ce qui revient au même, celui de la corde mn avec l'axe oa, est égal à $90^0 - \frac{1}{2}\psi$, on aura, l'équation de cette première droite devant être identique avec celle

$$c = \alpha a + \beta b,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cot \tfrac{1}{2}\psi, \qquad on'' = \frac{on+on'}{2} = \tfrac{1}{2}\left(c + \frac{co}{\cos\frac{1}{2}\psi}\right) = \frac{c(1+\cos\frac{1}{2}\psi)}{2\cos\frac{1}{2}\psi} = \frac{c}{\alpha};$$

d'où

$$\alpha = \frac{2\cos\frac{1}{2}\psi}{1+\cos\frac{1}{2}\psi} = 1 - \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{4}\psi, \qquad \beta = \frac{2\sin\frac{1}{2}\psi}{1+\cos\frac{1}{2}\psi} = 2\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\psi;$$

et enfin, pour l'expression de la limite de l'erreur proportionnelle,

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}nn'}{on''} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\cos\frac{1}{2}\psi} - c\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\cos\frac{1}{2}\psi} + c\right)} = \frac{1-\cos\frac{1}{2}\psi}{1+\cos\frac{1}{2}\psi} = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{4}\psi$$

valeurs qui coïncident respectivement avec celles qui ont été données en premier lieu, quand on prend

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\psi = \tfrac{1}{4}(\operatorname{arc\,cot} = k).$$

---

*) Plus généralement, s'il s'agit d'une fonction quelconque $F(a, b)$ ou d'une surface représentée par l'équation $c = F(a, b)$, et qu'on se propose de déterminer le plan dont l'équation est $c = \alpha a + \beta b + \gamma$, de façon que les ordonnées c de l'un et de l'autre, correspondantes aux mêmes abscisses ou valeurs de a et b, diffèrent le moins possible entre elles, pour toute l'étendue d'un segment convexe de la surface $c = F(a, b)$, limité au plan dont $c = ma + nb + p$ serait l'équation donnée, on mènera, par l'intersection de ce dernier avec celui des a, b, intersection représentée par $ma + nb + p = 0$, un plan tangent au segment proposé, ou, plus généralement, un plan qui serve de limite extérieure à ce segment; puis on conduira, entre ce plan et le plan $c = ma + nb$, un nouveau plan passant par la droite $ma + nb + p = 0$, de manière que ses ordonnées soient moyennes harmoniques entre les ordonnées correspondantes des deux autres; c'est-à-dire telles qu'en nommant respectivement c', c'' les ordonnées des deux derniers, c celle du plan doit il s'agit prise pour les mêmes valeurs de a et de b, on ait

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{c''}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{c'-c}{c'} = \frac{c-c''}{c''};$$

l'équation de ce plan sera celle du plan cherché, et, en l'identifiant avec l'équation $c = \alpha a + \beta b + \gamma$, on en déduira les valeurs des indéterminées α, β, γ. Quant à la limite de l'erreur, elle aura évidemment pour expression le rapport

$$\frac{c'-c}{c'} = \frac{c-c''}{c''}.$$

Formules relatives au cas où le rapport de a à b est compris entre des limites quelconques.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la valeur de la fonction $\sqrt{(a^2+b^2)}$ devait être prise dans l'intervalle compris depuis $\frac{a}{b}=k$ jusqu'à $\frac{a}{b}=\infty$ ou depuis $\cot\psi=0$ jusqu'à $\cot\psi=k$; mais les raisonnemens resteraient absolument les mêmes s'il s'agissait de considérer les valeurs de cette fonction entre des limites quelconques, par exemple, depuis la droite on (Fig. 3.) pour laquelle l'angle $aon=\psi'$, $\frac{a}{b}=\cot\psi'=k'$, jusqu'à la droite om pour laquelle l'angle $aom=\psi$, $\frac{a}{b}=\cot\psi=k$. La droite $m''n''$, qui partage en deux parties égales l'intervalle compris entre la corde mn de la portion de courbe à considérer et la tangente $m'n'$ à cette courbe, qui lui est parallèle, devant toujours être prise pour celle dont l'équation est $c=\alpha a+\beta b$, on trouvera sans difficultés,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\cot\tfrac{1}{2}(\psi+\psi'),\qquad \frac{c}{\alpha}=\frac{c\,[1+\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi')]}{2\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi')},$$

d'où

$$\alpha=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi')}{1+\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi')}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi')}{\cos^2\frac{1}{4}(\psi-\psi')},\quad \beta=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi')}{1+\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi')}{\cos^2\frac{1}{4}(\psi-\psi')}.$$

D'ailleurs, on a visiblement, p et p' étant les intersections de la corde et de l'arc mn avec la droite op qui divise en deux parties égales l'angle $mon=\psi-\psi'$,

$$\varepsilon=\frac{\frac{1}{2}(op-op')}{\frac{1}{2}(op+op')}=\frac{1-\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi')}{1+\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi')}=\tan^2\tfrac{1}{4}(\psi-\psi');$$

de sorte que les trois nombres α, β et ε peuvent encore ici être calculés très-facilement au moyen des tables trigonométriques. Supposant, par exemple, $\tan\psi$ ou $\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}7072$, $\tan\psi'$ ou $\frac{1}{k}=\frac{1}{10}\sqrt{10}=0{,}316228$, on trouvera

$$\alpha=0{,}901042,\qquad \beta=0{,}4477,\qquad \varepsilon=0{,}0059934<\tfrac{1}{100}.$$

Expression linéaire approchée du radical $\sqrt{(a^2-b^2)}$, relative à des limites quelconques de a et de b.

Pour offrir une seconde application simple du principe posé en dernier lieu, nous nous proposons de trouver la valeur linéaire et approchée du radical $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Fesant donc

$$\sqrt{(a^2-b^2)}=c=\alpha a+\beta b,$$

et supposant qu'il s'agisse de déterminer α et β pour l'intervalle compris depuis $\frac{a}{b} = k = \cot\psi$ jusqu'à $\frac{a}{b} = k' = \cot\psi'$; nous aurons à considérer (Fig. 4.), l'hyperbole équilatère cnm, représentée par l'équation $a^2 - b^2 = c^2$, et ayant $oc = c$ pour demi-axe réel, ou plutôt la portion mpn de cette hyperbole, comprise dans l'angle aob des a et b positifs, depuis la droite on formant avec l'axe oa l'angle $noc = \psi'$, jusqu'à la droite om formant avec le même axe l'angle $moc = \psi$. Or, d'après ce qui précède, toute la difficulté de la question consistera à trouver l'équation de la droite $m''n''$ qui divise en deux parties égales l'intervalle compris entre la corde mn de l'hyperbole et la tangente parallèle la plus voisine $m'n'$; car cette équation devra être identique avec l'équation $c = \alpha a + \beta b$, et la limite de l'erreur aura pour valeur, le rapport

$$\frac{nn''}{on''} = \frac{\eta\eta''}{o\eta''} = \frac{o\eta - o\eta'}{o\eta + o\eta'};$$

η, η', η'' représentant les intersections respectives de l'axe oa avec les droites mn, $m'n'$, $m''n''$ suffisamment prolongées.

Nommons a', b' les coordonnées de m, a'', b'' celles de n, l'équation de la droite indéfinie mn sera

$$b - b' = \frac{b' - b''}{a' - a''}(a - a'), \quad \text{ou} \quad b = \frac{b' - b''}{a' - a''}a + b' - a'\frac{b' - b''}{a' - a''};$$

de plus on aura, pour déterminer a', b', a'', b'' en fonction de ψ, ψ' et e, les relations

$$\frac{a'}{b'} = \cot\psi, \quad \frac{a''}{b''} = \cot\psi', \quad a'^2 - b'^2 = c^2, \quad a''^2 - b''^2 = c^2$$

desquelles on tire

$$\frac{b' - b''}{a' - a''} = \frac{a' + a''}{b' + b''} = \frac{\sqrt{(1 - \tang^2\psi)} + \sqrt{(1 - \tang^2\psi')}}{\tang\psi\sqrt{(1 - \tang^2\psi')} + \tang\psi'\sqrt{(1 - \tang^2\psi)}}.$$

Observant que, dans cette expression, $\tang\psi$ et $\tang\psi'$ ne sauraient surpasser l'unité, on posera pour la simplicité,

$$\tang\psi = \cos\omega, \quad \tang\psi' = \cos\omega', \quad \text{d'où} \quad \frac{b' - b''}{a' - a''} = \frac{\sin\omega + \sin\omega'}{\sin(\omega + \omega')}.$$

On trouvera pareillement et dans les mêmes hypothèses,

$$b' - a'\frac{b' - b''}{a' - a''} = -c\frac{1 - \cos(\omega + \omega')}{\sin(\omega + \omega')}.$$

Ces expressions sont susceptibles d'être ramenées à une forme plus simple encore, en posant de nouveau,

$$\omega + \omega' = 2\sigma, \quad \omega' - \omega = 2\delta;$$

on obtient en effet, par les transformations trigonométriques,

$$\frac{b'-b''}{a'-a''}=\frac{\sin\omega+\sin\omega'}{\sin(\omega+\omega')}=\frac{\cos\delta}{\cos\sigma},\quad b'-a'\frac{b'-b''}{a'-a''}=-c\frac{1-\cos(\omega+\omega')}{\sin(\omega+\omega')}=-\operatorname{tang}\sigma;$$

au moyen de quoi l'équation de la corde mn devient

$$b=\frac{\cos\delta}{\cos\sigma}a-\operatorname{tang}\sigma c.$$

Reste à trouver celle de la tangente $m'n'$ qui lui est parallèle. Or, il est évident, que, pour l'obtenir, il ne s'agira que d'écrire, dans la précédente, que m coïncide avec n ou que $\psi'=\psi$, $\omega'=\omega$, et partant $\delta=0$; σ acquérant ainsi une valeur inconnue ω que nous représenterons par σ'. On obtient, d'après cette considération, pour l'équation de la tangente $m'n'$

$$b=\frac{1}{\cos\sigma'}a-\operatorname{tang}\sigma' c$$

dans laquelle on a, pour déterminer σ',

$$\frac{1}{\cos\sigma'}=\frac{\cos\delta}{\cos\sigma}\quad\text{ou}\quad\cos\sigma'=\frac{\cos\sigma}{\cos\delta},$$

puisque la tangente doit être parallèle à mn.

D'après cela, on aura évidemment aussi pour l'équation de la parallèle équidistante $m''n''$,

$$b=\frac{\cos\delta}{\cos\sigma}a-\frac{c}{2}(\operatorname{tang}\sigma+\operatorname{tang}\sigma').$$

Cette équation devant être identique à celle $b=\alpha a+\beta b$, on en déduit finalement

$$\alpha=\frac{2\cos\delta}{\cos\sigma(\operatorname{tang}\sigma+\operatorname{tang}\sigma')}=\frac{2\cos\delta\cos\sigma'}{\sin(\sigma+\sigma')}=\frac{2\cos\sigma}{\sin(\sigma+\sigma')},$$

$$\beta=-\frac{2}{\operatorname{tang}\sigma+\operatorname{tang}\sigma'}=-\frac{2\cos\sigma\cos\sigma'}{\sin(\sigma+\sigma')}=-\frac{2\cos^2\sigma}{\cos\delta\sin(\sigma+\sigma')}.$$

Quant à la limite ε des erreurs proportionnelles qu'on risque de commettre, on la trouvera en observant que les équations ci-dessus des droites mn et $m'n'$ donnent, en y fesant $b=0$,

$$o\eta=c\frac{\operatorname{tang}\sigma\cos\sigma}{\cos\delta}=c\frac{\sin\sigma}{\cos\delta},\qquad o\eta'=c\sin\sigma',$$

et partant

$$\varepsilon=\frac{o\eta-o\eta'}{o\eta+o\eta'}=\frac{\sin\sigma-\sin\sigma'\cos\delta}{\sin\sigma+\sin\sigma'\cos\delta}=\frac{\sin\sigma-\operatorname{tang}\sigma'\cos\sigma}{\sin\sigma+\operatorname{tang}\sigma'\cos\sigma}=\frac{\sin(\sigma-\sigma')}{\sin(\sigma+\sigma')}.$$

Marche à suivre dans les calculs numériques.

Toutes ces quantités, comme on voit, se calculeront aisément au moyen des tables trigonométriques.

A cet effet, k' et k étant les limites supérieure et inférieure du rapport $\frac{a}{b}$, de sorte qu'on ait $\frac{1}{k'} < \frac{1}{k} < 1$, ou k tout au plus égal à 1, on calculera les angles ω et ω' au moyen des relations

$$\omega = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{k}\right), \qquad \omega' = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{k'}\right),$$

ou

$$\log\cos\omega = 10 - \log k, \qquad \log\cos\omega' = 10 - \log k,$$

après quoi on déterminera facilement les angles

$$\varepsilon = \frac{\omega' + \omega}{2}, \qquad \delta = \frac{\omega' - \omega}{2},$$

et, par suite, l'angle σ' donné par la relation

$$\cos\sigma' = \frac{\cos\sigma}{\cos\delta}, \quad \text{ou} \quad \log\cos\sigma' = 10 + \log\cos\sigma - \log\cos\delta.$$

Connaissant σ, σ' et δ ainsi que les logarithmes de $\cos\sigma$ et de $\cos\delta$, on n'aura plus qu'à chercher dans les tables les logarithmes de $\sin(\sigma + \sigma')$, $\sin(\sigma - \sigma')$ pour obtenir, par de simples additions ou soustractions, ceux de α, β et ε.

Exemples particuliers et idée des limites de l'approximation.

Afin d'acquérir une idée des limites entre lesquelles il est avantageux de substituer la fonction $\alpha a + \beta b$ au radical $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ nous supposerons d'abord que l'on ait $k = 1$, $k' =$ un nombre quelconque plus grand que l'unité; ce qui revient à admettre qu'on doive prendre les valeurs du radical depuis $a = b$ où il est nul, jusqu'à $a = \infty b$ où il se réduit à a. Or, cette supposition donnant

$$\omega = 0, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\omega', \quad \delta = \tfrac{1}{2}\omega', \quad \cos\sigma' = 1, \quad b' = 0, \quad \varepsilon = 1,$$

on voit que les erreurs commises pourraient devenir égales à la valeur même du radical quand a serait égal à b ou que b serait nul etc., ce qui n'est pas admissible, mais, quelque près que k soit de l'unité, pourvu qu'il soit plus voisin encore de k', on pourra toujours trouver une expression linéaire suffisamment approchée de $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Supposant, par exemple, $k = 1{,}01$, $k' = 1{,}02$ ou ce qui revient au même, supposant qu'il s'agisse de prendre la valeur de $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ depuis $a = 1{,}016$ jusqu'à $a = 1{,}026$, on trouvera

$$\delta = \frac{\omega' - \omega}{2} = 3^0 - 17' - 50'',607, \qquad \sigma = 9^0 - 43' - 5'',347,$$

$$\sigma' = 9^0 - 8' - 43'',65 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0{,}0309,$$

de sorte que l'erreur commise serait au plus $\frac{1}{3^{12}}$ de $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Quant aux valeurs de α et de β, elles seraient, dans les mêmes hypothèses,

$$\alpha = 6{,}09718, \qquad \beta = 6{,}0197.$$

On a donc, à moins de $\frac{1}{312}$ près, pour l'intervalle compris depuis $a = 1{,}02$ jusqu'à $a = 1{,}026$,

$$\sqrt{(a^2 - b^2)} = 6{,}097\,a - 6{,}02\,b.$$

A mesure ensuite que la limite supérieure k du rapport de a à b s'éloignera de 1, la limite inférieure k' pourra elle-même s'en éloigner de plus en plus en s'approchant de l'infini, sans qu'on ait à craindre des erreurs graves sur l'approximation linéaire du radical. Supposant, par exemple, $k' = \infty$ ou $\cos\omega = 0$ et $k = 1{,}1$, on aura

$$\omega' = 90^0, \quad \omega = 24^0 - 37' - 28'', \quad \sigma = 57^0 - 18' - 44'', \quad \cos\sigma' = \cot\sigma,$$

$$\sigma' = 50^0 - 5',$$

partant

$$\varepsilon = 0{,}1319, \quad \alpha = 1{,}1319 = 1 - \varepsilon, \quad \beta = 0{,}72636.$$

On a donc

$$\sqrt{(a^2 - b^2)} = 1{,}1319\,a - 0{,}72636\,b,$$

à moins de $\frac{1}{7}$ près pour toute l'étendue comprise depuis $b = 0$ jusqu'à $b = 0{,}91\,a$ environ.

On trouvera de même que, depuis $b = 0$ jusqu'à $b = \frac{1}{2}a$, ou de a infini jusqu'à $a = 2b$, on a, à moins de 0,0186 ou $\frac{1}{53}$

$$\sqrt{(a^2 - b^2)} = 1{,}018623\,a - 0{,}272944\,b.$$

Il serait inutile de pousser plus loin cet examen, attendu que, dans les applications de la mécanique aux machines, les radicaux de la forme $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ sont rarement à considérer.

Approximation linéaire des radicaux de la forme $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Nous en dirons autant de ceux de la forme $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ qui représentent la résultante de trois forces rectangulaires entre elles et situées dans l'espace. D'ailleurs, si l'on connaît les limites entre lesquelles demeurent compris les rapports des composantes a, b, c ou de leurs résultantes partielles $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ etc., on pourra toujours ramener ce cas au premier de ceux que nous avons examinés dans cette note. Connaissant, par exemple, les limites entre lesquelles se trouvent compris les rapports de a à $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ et de b à c, on aura successivement

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} = \alpha a + \beta\sqrt{(b^2 + c^2)} = \alpha a + \beta(\alpha' b + \beta' c) = \alpha a + \beta\alpha' b + \beta\beta' c,$$

α, β, α', β' étant des nombres obtenus comme cela a été expliqué précé-

demment; mais ici les erreurs partielles relatives à chaque opération, pourront bien s'ajouter, et si l'on représente par δ et δ' les limites des erreurs respectivement commises dans la première et la seconde de ces opérations, la plus grande erreur absolue qu'on risque de commettre, sera évidemment exprimée par

$$\delta\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}+\beta\delta'\sqrt{(b^2+c^2)}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\left[\delta+\beta\delta\sqrt{\left(\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)}\right]$$

quantité plus petite que $(\delta+\beta\delta')\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$.

En particulier, si l'on sait seulement que $a^2>b^2+c^2$ et $b^2>c^2$, on aura

$$\alpha=\alpha'=0{,}96, \quad \beta=\beta'=0{,}4, \quad \delta=\delta'=0{,}03954,$$

et la limite de l'erreur qu'on risque de commettre sera, en observant qu'ici $a^2+b^2+c^2>2(b^2+c^2)$, au-dessous de la quantité

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\,(\delta+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\beta\delta')=0{,}0507\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}.$$

22.

Unterschiede der einfachen Functionen.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI. und No. 24. Band XII.)

Anhang zu der Lehre von den aufstufenden Functionen.

§. 47.

Anwendung der aufsteigenden Functionen auf Potenzirung der Polynomien, die durch die Function e^y erzeugt werden.

Zu den mancherlei Anwendungen, die von den aufstufenden Functionen gemacht werden können, und insbesondere auch schon von der Lehre der Unterschiede gemacht worden sind, wovon man sich auch aus den frühern Untersuchungen überzeugen kann, gesellen wir nun noch einige. Wir stellen sie hier zusammen, weil durch Einschaltung an frühern Orten Unterbrechungen nicht zu vermeiden waren.

Bei den Darstellungen der aufsteigenden Functionen durch Differenziale §. 17. u. ff., §. 41. u. ff. wurde die bekannte Reihe

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots.$$

benutzt und der Exponent y als Inbegriff der Geschäfte, welche in dem Ausdrucke $\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}$ liegen, betrachtet, das Gesetz, welches von der einfachen Gröfse y gilt, wurde auf ein zusammengesetztes Geschäft ausgedehnt und hieraus weitere Ableitungen gemacht, wodurch die Gleichungen für die Aufstufungen

$$\zeta^m X = \left(1 + e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}}\right)^m X; \qquad \zeta^{-m} = \left(1 + e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}}\right)^{-m} X,$$

und die für die Unterschiede

$$\Delta^m X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^m X; \qquad \Delta^{-m} X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^{-m} X$$

gewonnen wurden. Da diese Gleichungen jedoch nur formell sind, so ha-

ben wir für die angezeigten Geschäfte entwickelte Reihen gesucht, die in den Gleichungen 104., 114. u. ff., 211. u. ff., 219. u. ff. gegeben sind.

Wenn wir nun von einer Gröfse y, die in e^y als Exponent erscheint, auf Geschäfte übergegangen sind, so können wir auch umgekehrt von den zusammengesetzten Geschäften auf die ursprüngliche Gröfse übergehen. Dies wird aber nicht allein in den formellen, sondern auch in den entwickelten Darstellungen geschehen können, indem man allenthalben y statt $\frac{\Delta x \,.\, \partial}{\partial x}$ setzt. Die Ausführung des Gesagten wird uns dann in Stand setzen, entwickelte Darstellungen für die Polynomien von e^y und dadurch eine Ausbeute für die Analysis auf folgende Weise zu gewinnen. Messen wir die vorstehenden Gleichungen mit der Function X, so erhalten wir

$$\zeta^m = \left(1+e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}\right)^m \quad \text{und} \quad \zeta^{-m} = \left(1+e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}\right)^{-m},$$

$$\Delta^m = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)^m \quad \text{und} \quad \Delta^{-m} = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)^{-m}.$$

Diese Gleichungen sind um so merkwürdiger, da sie nicht Gröfsen, sondern Geschäfte zum Gegenstande ihres Angriffes haben. Sie sind dem Anscheine nach hohl und leer. Setzen wir aber in ihnen $\frac{\Delta x \,.\, \partial}{\partial x} = y$, und stellen wir sie mit den Entwicklungen 104., 114., 211. u. ff. zusammen, so gewinnen sie Bedeutung. Es ist nemlich

$$(1+e^y)^m = \left(2+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\cdots\right)^m,$$

$$(1+e^y)^{-m} = \left(2+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\cdots\right)^{-m},$$

$$(e^y+1)^m = \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\right)^m,$$

$$(e^y+1)^{-m} = \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\right)^{-m},$$

die Verbindung dieser Reihen mit den gehörigen Entwicklungen führt zu folgenden, und zwar aus (104.):

$$228.\quad \begin{cases} (1+e^y)^2 = 4+4.y+\frac{6.y^2}{1.2}+\frac{10.y^3}{1.2.3}+\frac{18.y^4}{1.2.3.4}+\cdots \\ (1+e^y)^3 = 8+\frac{12.y}{1}+\frac{24.y^2}{1.2}+\frac{54.y^3}{1.2.3}+\frac{132.y^4}{1.2.3.4}+\cdots \\ (1+e^y)^4 = 16+\frac{32.y}{1}+\frac{80.y^2}{1.2}+\frac{224.y^3}{1.2.3}+\cdots \\ (1+e^y)^5 = 32+\frac{80.y}{1}+\frac{240.y^2}{1.2}+\frac{800.y^3}{1.2.3}+\cdots \end{cases}$$

u. s. w. In §. 18. ist das Bildungsgesetz für die Vorzahlen dieser Entwicklungen angegeben. Aus (114.) ergiebt sich für die negativen Potenzen

$$229.\quad \begin{cases} (1+e^y)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{8.1.2.3} - \frac{y^5}{4.1.2.3.4.5} + \frac{17.y^7}{16.1.2....7} - \dots \\ (1+e^y)^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{y}{4} + \frac{y^2}{8.1.2} + \frac{y^3}{8.1.2.3} - \frac{y^4}{4.1.2.3.4} - \dots \\ (1+e^y)^{-3} = \frac{1}{8} - \frac{3.y}{16} + \frac{3.y^2}{16.1.2} - \frac{3.y^3}{8.1.2.3} + \frac{9.y^4}{32.1.2.3.4} + \dots \end{cases}$$

u. s. w.

Aus (211.) u. ff. gewinnen wir folgende Gleichungen:

$$230.\quad \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\dots\right)^m = S\left(\frac{1.2\,3\dots m}{{}^mp_{(m;1)!}}\right)\frac{y^m}{1.2.3\dots m} + S\left(\frac{1.2.3\dots(m+1)}{{}^{m+1}p_{(m;1,2)!}}\right)\frac{y^{m+1}}{1.2\dots(m+1)} + S\left(\frac{1.2.3\dots(m+2)}{{}^{m+2}p_{(m;1,2,3)!}}\right)\frac{y^{m+2}}{1.2\dots(m+2)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$231.\quad \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\dots\right)^m = SC'_{(0;1,2\dots m)}\,y^m + SC'_{(1;1,2\dots m)}\frac{y^{m+1}}{m+1} + SC'_{(2;1,2\dots m)}\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Benutzen wir die Darstellung (136.), so ist

$$232.\quad \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\dots\right)^m$$

$$= \left(m^m - \frac{m}{1}(m-1) + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)\dots\right)\frac{y^m}{1.2\dots m} + \left(m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+1}\dots\right)\frac{y^{m+1}}{1.2\dots(m+2)} + \left(m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m+1)}{1.2}(m-2)^{m+2}\dots\right)\frac{y^{m+2}}{1.2\dots(m+2)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Aus (213.) aber wird

$$233.\quad \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\dots\right)^m$$

$$= y^m + \frac{m}{2}y^{m+1} + \frac{m(3m+1)}{1.2.3.4}y^{m+2} + \frac{m^2(m+1)}{1.2.1.2.3.4}y^{m+3} + \dots$$

Diese Gleichung gilt auch für negative Potenzen. Die speciellen Fälle hiervon sind:

234. $$\begin{cases}\left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+....\right)^{-1}=\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{y}{6.2}-\frac{1}{30}\cdot\frac{y^3}{4.1.2.3}+\frac{1}{42}\cdot\frac{y^5}{6.1.2...5}-...), \\ \left(y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1\,2.3}+....\right)^{-2}=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{5}{12}-\frac{y}{12}\cdot\frac{y^2}{120.2}+\frac{y^3}{120.1.2.3}-....)\end{cases}$$

u. s. w.

§. 48.

Darstellung der Unterschiede grofser Potenzial-Gröfsen.

Ist der *m*te Unterschied irgend einer Potenzial-Gröfse x^p darzustellen, deren Zunahme Δx ist, so erhalten wir aus (175.) die bekannte Darstellung

$$\Delta^m x^p=(x+m\Delta x)^p-\frac{m}{1}(x+(m-1)\Delta x)^p+\frac{m(m-1)}{1.2}(x+(m-2)\Delta x)^p-....$$

Diese Gleichung läfst sich auch auf folgende Weise darstellen:

235. $$\Delta^m x^p=(x+m\Delta x)^p\left[1-\frac{m}{1}\left(\frac{x+(m-1)\Delta x}{x+m\Delta x}\right)^p+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{x+(m-2)\Delta x}{x+m\Delta x}\right)^p)-....\right].$$

Die Ausdrücke $\frac{x+(m-1)\Delta x}{x+m\Delta x}$, $\frac{x+(m-2)\Delta x}{x+m\Delta x}$ u. s. w. bedeuten echte Brüche; je gröfser daher p ist, desto kleiner wird der Werth dieser Brüche werden. In diesem Falle werden die Glieder dieser Reihe sehr convergiren, und es werden oft nur einige Anfangsglieder nöthig sein, um den Werth von $\Delta^m x^p$ näherungsweise und ziemlich genau bei grofsem p bestimmen zu können.

Den Werth dieser Glieder kann man leicht finden, wenn man sie auf folgende Weise darstellt:

$$\frac{m}{1}\left(\frac{x+(m-1)\Delta x}{x+m\Delta x}\right)^p=\frac{m}{\left(\frac{x+m\Delta x}{x+(m-1)\Delta x}\right)^p},$$

$$\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{x+(m-2)\Delta x}{x+m\,m\Delta x}\right)^p-\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+m\Delta x}{x+(m-2)\Delta x}\right)^p}$$

u. s. w. Man kann sich bei dieser Darstellungsweise der Logarithmen bedienen, und dann ist

$$m\left(\frac{x+(m-1)\Delta x}{x+m\Delta x}\right)^p=\quad\log m\quad-p\,[\log(x+m\Delta x)-\log(x+(m-1)\Delta x)],$$

$$\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{x+(m-2)\Delta x}{x+m\Delta x}\right)^p=\log\frac{m(m-1)}{1.2}-p\,[\log(x+m\Delta x)-\log(x+(m-2)\Delta x)]$$

u. s. w. Sind aber die Logarithmen gefunden, so hat man zu ihnen die Zahlen zu suchen, sie nach Angabe der Zeichen zu 1, zu- und abzuziehen und das Resultat mit $(x+m\Delta x)^p$ zu vervielfachen.

Bedeuten nicht allein p, sondern auch x und m grofse Zahlen, so hat man, wie vorhin:

$$\Delta^m x^p = (x + m\,\Delta x)^p - \frac{m}{1}(x + (m-1)\,\Delta x)^p + \ldots.$$

Berücksichtigt man, dafs bei grofsem x und m,

$$m-1 = m, \quad m-2 = m, \quad m-3 = m, \quad \ldots.$$

ohne grofse Abweichung gesetzt werden kann, so wird

$$\frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m^2}{1.2}, \qquad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{m^3}{1.2.3}, \quad \ldots.$$

$$(m-1)\,\Delta x = m\,\Delta x, \qquad (m-2)\,\Delta x = m\,\Delta x, \quad \ldots.$$

und dann finden wir, wenn man den gemeinschaftlichen Factor ausstöfst,

$$\Delta^m x^p = (x + m\,\Delta x)^p \left(1 - \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1.2} - \frac{m^3}{1.2.3} + \ldots.\right),$$

und hieraus, wenn man berücksichtigt, dafs

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1.2} - \frac{m^3}{1.2.3} - \ldots. = e^{-m}$$

ist,

$$236. \qquad \Delta^m x^p = (x + m\,\Delta x)^p . e^{-m}.$$

Wird die Zunahme $\Delta x = 1$ gesetzt, so wird hieraus gewonnen:

$$237. \qquad \Delta^m x^p = (x + m)^p\, e^{-m}.$$

Sehr zweckmäfsig läfst sich diese Darstellungsweise dann benutzen, wenn Resultate grofser Zahlen, die einander näher liegen, mit einander verglichen werden sollen, bei denen sich die etwanige Abweichung gegenseitig ausgleicht.

Wir beschränken uns nun auf den Fall, wenn die zwei Gröfsen m und p dem Ausdrucke $\Delta^m x^p$ einander gleich sind, und die Zunahme $\Delta x = 1$ ist, und setzen zu dem Ende $m = p = z$; dann wird, wenn die gehörigen Werthe in (235.) eingeführt werden,

$$\Delta^z x^z = z^z \left[1 - z\left(\frac{z+x-1}{x+z}\right)^z + \frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z+x-2}{x+z}\right)^z - \ldots.\right],$$

und hieraus, da x jeden möglichen Werth bedeuten kann, für $x = 0$,

$$\Delta^z 0^z = z^z \left[1 - z\left(\frac{z-1}{z}\right)^z + \frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right)^z - \ldots.\right].$$

Der Werth des Ausdrucks $\Delta^z 0^z$ ist keineswegs ein imaginärer, wie der Anschein vermuthen lassen könnte, sondern ein reeller. Für die Gleichung läfst sich nun aufser dem Ausdrucke $z^z . e^{-z}$ No. 237., der nur für ein grofses z gilt, noch folgender Binomial-Ausdruck

$$z^z \left[1 - \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{z}{2}+1}\right]^z$$

gebrauchen, denn dieser Ausdruck giebt in der That den Werth für die Entwicklung

$$z^z\left[1-\frac{z}{1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^z+\frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right)^z-\ldots.\right]$$

näherungsweise sehr genau an, wenn man nur berücksichtigt, dafs man den Exponenten $\frac{z}{2}+1$ in dem Ausdrucke $\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{z}{2}+1$, wo z eine gerade oder ungerade Zahl sein kann, so bestimmt, dafs statt einer ungeraden Zahl die nächst höhere gerade gewonnen wird. Hiernach ist also:

238. $$\Delta^z 0^z = z^z\left[1-z\left(\frac{z-1}{z}\right)^z+\frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right)^z\ldots.\right]$$

$$= z^z\left[1-\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{z}{2}+1}\right]^z.$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich durch folgende Beispiele überzeugen. Wenn z. B. $z=6$ ist, so wird

$$\Delta^4 0^4 = 4^4[1-4(\tfrac{3}{4})^4+6(\tfrac{2}{4})^4-4(\tfrac{1}{4})^4] = 24$$

und

$$4^4[1-(\tfrac{3}{4})^3]^4 = (\tfrac{37}{16})^4 = 28, \text{ ziemlich genau,}$$

$$\Delta^6 0^6 = 6^6[1-6(\tfrac{5}{6})^6+15(\tfrac{4}{6})^6-20(\tfrac{3}{6})^6+15(\tfrac{2}{6})^6-5(\tfrac{1}{6})^6] = 720.$$

Eben so ist

$$6^6[1-(\tfrac{5}{6})^4]^6 = (\tfrac{671}{216})^6 = 729, \text{ ziemlich genau.}$$

§. 49.

Von den Facultäten sehr grofser Zahlen.

Sehr häufig wird man bei einzelnen Darstellungen auf die Facultäten

$$1.2.3\ldots.x = 1^{x|1}; \quad x(x+1)\ldots.(x+m-1) = x^{m|1} \text{ oder}$$

$$x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m+1) = x^{m|-1}$$

geführt, deren Werth zu kennen nöthig ist. Bedeuten x, oder x und m sehr grofse Zahlen, so ist die Darstellung des Werthes dieser Producte auf dem Wege der Multiplication sehr mühsam. Es möchte daher nicht unzweckmäfsig sein, abgekürzte Methoden aufzusuchen. Dies soll im Folgenden geschehen.

Vergleichen wir die beiden ersten Glieder in der Darstellung des $m$ten Unterschiedes (136. und 139.) mit einander, so werden sie als Darstellungen einer und derselben Sache einander gleich sein. Demnach ist

$$\left(m^m-\frac{m}{1}(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\ldots.\right)\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{1.2\ldots.m}y^{p-m}(\Delta x)^m$$

$$= 1.2.3\ldots.m\,SC'_{(0;1,2,3,\ldots.m)}\,\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{1.2\ldots.m}y^{p-m}(\Delta x)^m.$$

Messen wir auf beiden Seiten mit gleichen Gröfsen, setzen $m = x$, und berücksichtigen, dafs $SC_{(0;\,1,\,2,\,\ldots\,m)} = 1$ ist, so ist

$$239. \quad 1.2.3\ldots.x = x^x\left[1-\frac{x}{1}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x+\frac{x(x-1)}{1.2}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x\ldots.\right).$$

Verbinden wir diese Gleichung mit (238.), so erhalten wir

$$240. \quad 1.2.3\ldots.x = x^x\left[1-\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+1}\right]^x.$$

Diese Gleichung giebt den Werth der Facultät $1^{x\,|\,1}$ näherungsweise, wie wir schon oben gesehen, sehr genau, und Logarithmen werden sehr schnell zur wirklichen berechnenden Darstellung führen. Es ist

$$\log(1.2.3\ldots.x) = x\log x + x\log\left[1-p\left(\frac{x+2}{2}\log\frac{x-1}{x}\right)\right]$$

$$= x\log x + x\log\left(x^{\frac{x}{2}+1}-(x-1)^{\frac{x}{2}+1}\right)-x\log x^{\frac{x}{2}+1}.$$

Soll der Werth der Facultät $(p+1)(p+2)(p+3)\ldots.x$ berechnet werden, so ist zu berücksichtigen, dafs

$$(p+1)(p+2)\ldots.x = \frac{1.2.3\ldots.p(p+1)(p+2)\ldots.x}{1.2.3\ldots.p},$$

und demnach

$$241. \quad (p+1)(p+2)(p+3)\ldots.x = \frac{x^x\left[1-\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+1}\right]^x}{p^p\left[1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p}{2}+1}\right]^p}$$

ist. Eine andere sehr kurze Darstellung des Werthes der Facultäten sehr grofser Zahlen ergiebt sich durch die Logarithmen. Ist nemlich die Facultät $x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m)$ gegeben, so ist

$\log[x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m)] = \log x + \log(x+1) + \log(x+2)\ldots.\log(x+m)$.

Nun ist nach der Gleichung (180.):

$$\log x = \log x$$

$$\log(x+1) = \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \ldots.$$

$$\log(x+2) = \log x + 2\frac{1}{x} - 2^2\frac{1}{2x^2} + 2^3\frac{1}{3x^3} - 2^4\frac{1}{4x^4} + \ldots.$$

$$\log(x+3) = \log x + 3\frac{1}{x} - 3^2\frac{1}{2x^2} + 3^3\frac{1}{3x^3} - 3^4\frac{1}{4x^4} + \ldots.$$

. . . . . .

$$\log(x+m) = \log x + m\frac{1}{x} - m^2\frac{1}{2x^2} + m^3\frac{1}{3x^3} - m^4\frac{1}{4x^4} + \ldots.$$

Werden diese Gleichungen in verticaler Richtung zusammengezählt und berücksichtigt, dafs der Logarithme von x, $(m+1)$ mal, alle andere Glieder, aber nur m mal vorkommen, so hat man folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}\log[x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m)] = \quad & (m+1)\log x \\ & +(1+2+3+\ldots.+m)\frac{1}{x} \\ & +(1+2^2+3^2+\ldots.+m^2)\frac{1}{2x^2} \\ & +(1+2^3+3^3+\ldots.+m^3)\frac{1}{3x^3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat eine unendliche Gliederzahl. Mit jedem Gliede ist die Potenzenreihe der natürlichen Zahlen von 1 bis m verbunden. Es ist klar, dafs die Summen dieser Potenzenreihen zunehmen, wie die Exponenten wachsen. Daher wird die Summe der Potenzenreihe, die einen unendlich grofsen Exponenten hat, auch unendlich grofs sein, und es gewinnt den Anschein, als convergire diese Reihe nicht. Sie convergirt aber dennoch, wenn man berücksichtigt, dafs

$$\frac{m^\infty}{x^\infty} = \left(\frac{m}{x}\right)^\infty = 0,$$

wenn $x > m$ ist, was hier vorausgesetzt wurde, und es wird der Werth der vorstehenden Reihe schon durch die ersten Glieder erschöpft sein. Berücksichtigt man nun, dafs

$$1+2+3+4+\ldots.+m = \frac{m(m+1)}{1.2},$$

und dafs ferner, wie sich später bei Summirung der Potenzenreihen zeigen wird,

$$1+2^2+3^2+\ldots.+m^2 = \frac{m^3}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m}{6} = Sm^2,$$

$$1+2^3+3^3+\ldots.+m^3 = \frac{m^4}{4}+\frac{m^3}{2}+\frac{m^2}{4} = Sm^3$$

u. s. w. ist, so hat man

$$242. \quad \log x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m)$$
$$= (m+1)\log x + \frac{m(m+1)}{1.2.x} - \frac{Sm^2}{2x^2} + \frac{Sm^3}{3x^3} - \ldots.$$

Soll der Werth der Facultät $x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m)$ dargestellt werden, so hat man aus (180.):

$$\log x = \log x,$$
$$\log(x-1) = \log x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \ldots.$$
$$\log(x-2) = \log x - \frac{1}{x} - 2^2\frac{1}{2x^2} - 2^3\frac{1}{3x^3} - \ldots.$$

u. s. w., und hieraus

243. $$\log x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-m)$$
$$= (m+1)\log x - \frac{Sm}{x} - \frac{Sm^2}{2x^2} - \frac{Sm^3}{3x^3} - \ldots.$$

Bei weitem zweckmäfsiger endlich ist die Darstellung der Werthe der Facultäten sehr grofser Zahlen durch die Differenzen der Logarithmen. Es ist nemlich

$$\log x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.(x+m)$$
$$= \log x + \log(x+1) + \log(x+2)\ldots. + \log(x+m).$$

Aus (186.) erhalten wir dadurch, dafs wir allmälig die Werthe 0, 1, 2, ... statt m und $\Delta x = 1$ setzen,

$$\log x = \log x,$$
$$\log(x+1) = \log x + \Delta\log x,$$
$$\log(x+2) = \log x + 2\Delta\log x + \frac{2.1}{1.2}\Delta^2\log x,$$
$$\log(x+3) = \log x + 3\Delta\log x + \frac{3.2}{1.2}\Delta^2\log x + \frac{3.2.1}{1.2.3}\Delta^3\log x,$$
. . . . . .
$$\log(x+m) = \log x + \frac{m}{1}\Delta\log x + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2\log x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3\log x + \ldots.$$

Werden diese Reihen in verticaler Richtung zusammengezogen und berücksichtigt, dafs

$$1+2+3+\ldots.+m = \frac{m(m+1)}{1.2},$$
$$1+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\ldots.\frac{(m-1)m}{1.2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3},$$
$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\ldots.\frac{(m-2)(m-1)m}{1.2.3} = \frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{1.2.3.4}$$

u. s. w.

ist, so hat man

244. $$\log x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m)$$
$$= (m+1)\log x + \frac{(m+1)m}{1.2}\Delta\log x + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\Delta^2\log x$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}\Delta^3\log x + \ldots.$$

Diese Reihe convergirt sehr stark, besonders wenn x eine grofse Zahl ist. Ist z. B. $x = 10000$, so ist aus §. 36.

$$\begin{aligned}
&\log 10000 . 10001 . 100002 \ldots . (10000 + m) \\
= \; & (m+1) \log 10000 \\
& + \frac{(m+1)m}{1.2} . 0{,}0000\,9999\,500 \ldots . \\
& - \frac{(m+1)[m(m-1)]}{1.2.3} . 0{,}0000\,0000\,999800 \ldots . \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wird die Facultät $x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m)$ zu Grunde gelegt, so erhält man durch Anwendung eines ähnlichen Verfahrens

$$\begin{aligned}
245. \quad & \log x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m) \\
= \; & (m+1)\log 10000 - \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta \log x + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \Delta^2 \log x \\
& - \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4} \Delta^3 \log x + \ldots .
\end{aligned}$$

Eine andere Methode, die Werthe der genannten Facultäten zu bestimmen, bietet die Integral-Rechnung. Setzen wir eine Facultät von sehr grofsem x:

$$x(x-1)(x-2)\ldots.2.1 = y,$$

so ist

$$\log y = \log x + \log(x-1) + \log(x-2)\ldots.$$

Wird differenziirt, so hat man

$$\partial \log y = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{x-1} + \frac{\partial x}{x-2} + \ldots. = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots.\right) \partial x.$$

Die in den Klammern eingeschlossene Reihe ist die bekannte harmonische Reihe. Setzen wir der Kürze wegen

$$S\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots. + 1,$$

so ist

$$\partial \log y = \left(S\frac{1}{x}\right) \partial x.$$

Wird integrirt, so entsteht

$$\log y = \int \left(S\frac{1}{x}\right) \partial x.$$

Die Möglichkeit auf diesem Wege das gewünschte Resultat zu finden, beruht auf der Darstellung des Summenausdruckes von $S\frac{1}{x}$ und auf seiner Integration. Dieser Summenausdruck ist:

$$S\frac{1}{x} = \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^2} + \ldots. + \text{Const.}$$

Die Integration dieser Gleichnng führt zu folgendem Resultat:

246. $\log(1.2.3.4....x) = (x+\frac{1}{2})\log x + \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}....$

Allen diesen Gleichungen liegen hyperbolische Logarithmen zu Grunde, deren Auffindung §. 36. gezeigt wurde.

Anwendung auf einige Fälle der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Wenn bei Lotterieen eine oder mehrere Nummern in jeder Ziehung herausgenommen und nach der Ziehung wieder zurückgeworfen werden, so kann es sich treffen, dafs nach mehreremal wiederholten Zügen eine oder mehrere Nummern ein- oder mehremal, andere gar nicht erschienen sind, wie dies bei manchen Staats-Lotterieen, oder bei dem Lotto-Spiele der Fall ist. Dies veranlafst die Untersuchung der Frage: In einer Urne sind s verschieden bezeichnete Kugeln, wovon bei jeder Ziehung p Kugeln herausgenommen und wieder zurückgeworfen werden. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit dafs, nach einer Anzahl von x Ziehungen, alle Kugeln herausgekommen sein werden?

Wir bemerken vorerst, dafs die Gröfse x nicht willkürlich ist; denn wenn in x Ziehungen alle in der Urne enthaltenen Kugeln erscheinen sollen, so mufs $x.p$ wenigstens so grofs als die Zahl aller Kugeln s sein. Deswegen kann x nicht kleiner als $\frac{s}{p}$ sein, und s wird als ein Vielfaches von x und p betrachtet werden können. Je gröfser x und p sind: desto leichter werden die Bedingungen der Aufgabe in Erfüllung gehen.

Wir gehen nun zur Beantwortung der Frage selbst über, beschränken uns aber der Deutlichkeit wegen auf einen speciellen Fall, weil sich von diesem leicht zum Allgemeinen übergehen läfst, und zwar auf folgenden:

In einer Urne sind 6 verschiedene Kugeln. Drei Kugeln werden bei jeder Ziehung herausgenommen und dann wieder zurückgeworfen. Zweimal wird gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach zwei Ziehungen alle Kugeln erschienen sind?

Bezeichnen wir die sechs Kugeln der Reihe nach durch a, b, c, d, e, f, so werden bei jedem Zuge drei verschiedene Kugeln erscheinen,

und die Zahl aller bei einer Ziehung möglichen Fälle fällt zusammen mit den Verbindungen von sechs Elementen zu drei Elementen, ist also $\frac{6.5.4}{1.2.3}$. Wird zweimal gezogen, so kann die Gesammtzahl aller dieser Verbindungen unter einander zusammentreffen, und es wird die Zahl aller möglichen Fälle

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3} = \left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2$$

sein, so dafs entweder drei, vier, fünf oder sechs verschiedene Kugeln unter den gezogenen vorkommen können. Kann man nun ferner die Zahl derjenigen Fälle bestimmen, worin eine Kugel, so werden sich hieraus und aus der vorstehenden Anzahl auch die Fälle bestimmen lassen, worin keine fehlt, wenn man die erstere von der letztern abzieht; denn alsdann hat man durch die Anzahl, worin keine Kugel fehlt, auch die gefunden, worin alle enthalten sind.

Zu dem Ende stellen wir die Verbindungen zu drei Elementen aus den Elementen a, b, c, d, f, g zusammen. Sie sind

abc	acf	bcd	bfg
abd	acg	bcf	cdf
abf	adf	bcg	cdg
abg	adg	bdf	cfg
acd	afg	bdg	dfg

Werden nun die gefundenen Gruppen, so wie es die Aufgabe verlangt, zu zweien aneinander gereiht, so entsteht die Gesammtanzahl von $\left(\frac{6.5.4}{1.2.4}\right)^3$. Unter diesen Verbindungen erscheinen solche, worin kein a, worin kein b, c, d, f, g vorkommt. Die Anzahl der Verbindungen, worin kein a vorkommt, sind:

bcd	bfg
bcf	cdf
bcg	cdg
bdf	cfg
bdg	dfg

Ihre Anzahl fällt zusammen mit den Verbindungen zu drei Elementen aus fünf, und ist $\frac{5.4.3}{1.2.3}$. Verbinden sich aber die einzelnen Fälle zu zweien unter einander, so ist die Gesammtzahl:

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3} = \left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2.$$

Auf gleiche Weise bestimmen sich die Verbindungen, worin kein b, kein c, kein d, kein f, kein g vorkommt. Sechs solcher Elemente sind es. Also ist die Anzahl der Fälle, worin immer ein Element ausgeschieden ist:

$$6.\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2.$$

Unter diesen Verbindungen, worin vorerst nur ein Element ausgeschieden wurde, sind aber auch solche mit ausgeschieden worden, worin zwei Elemente fehlen, wie dies z. B. in folgenden vier Verbindungen:

$$\begin{array}{ll} cdf & cfg \\ cdg & dfg \end{array}$$

der Fall ist. Hierin fehlt nicht nur das Element a, sondern auch das Element b; die Verbindungen, die sie erzeugen, wurden daher nicht nur unter dem Elemente a, sondern auch unter dem Elemente b ausgeschieden. Der Fehler, der hiedurch begangen wurde, mufs entfernt werden, und dies geschieht dadurch, dafs wir die Zahl der Fälle, welche zu viel ausgeschieden wurden, ermitteln und sie dann von $6.\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^3$ abziehen.

Die Zahl der Fälle, worin die zwei Elemente a und b fehlen, ergiebt sich, wenn man bestimmt, wie oft vier Elemente sich zu dreien verbinden und dann diese zweimal unter einander in Verbindung treten. Dies ist

$$\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right).\frac{4.3\ 2}{1.2.3} = \left(\frac{4.2.3}{1.2.3}\right)^2$$

mal. Diese Zahl kann so oft vorkommen, als es sechs Elemente zu zweien giebt: also ist die gesuchte Anzahl, worin die fraglichen Elemente zu viel ausgeschieden wurden,

$$\frac{6.5}{1.2}.\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2.$$

Wie nun die Ausscheidung eines Elementes die Ausscheidung zweier in sich schlofs, so schliefst auch die Aussonderung zweier Elemente die von dreien in sich; und in der That die Verbindung dfg wurde unter a, b, c ausgeschieden. Aehnliche Schlüsse führen zu folgender Bestimmung:

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}.\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)^2.$$

Durch dieses Ausscheiden erhalten wir für die Bestimmung der gesuchten Fälle

$$\frac{6}{1}.\frac{5.4.3}{1.2.3} - \left[\frac{6.5}{1.2}.\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{3.2.1}{1.2.3}\right]$$

$$= \frac{6}{1}.\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6.5}{1.2}.\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)^2.$$

Die Zahl aber, worin kein Element fehlt, bestimmt sich durch folgende Reihe:

$$\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6}{1}\cdot\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)^2,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dafs nach zwei Ziehungen die sechs Kugeln erschienen sind, die wir mit W bezeichnen wollen, ist

$$W = \frac{\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6}{1}\cdot\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2 - \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)^2}{\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2}$$

$$= 1 - 6.\left(\frac{5.4.3}{6.5.4}\right)^2 - \frac{6.5}{1.2}\cdot\left(\frac{4.3.2}{6.5.4}\right)^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(\frac{3.2.1}{6.5.4}\right)^2.$$

Hieraus erkennt man leicht das allgemeine Gesetz, welches der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des fraglichen Falles zu Grunde liegt. Die Wahrscheinlichkeit ist gleich einem Bruche, dessen Zähler aus einer Reihe von Gliedern, die mit abwechselnden Zeichen versehen sind, besteht, und die der Reihe nach die Zahlenausdrücke der fallenden Verbindungen aus der Gesammt-Anzahl der Kugeln zu so vielen Elementen sind, als die Zahl der bei jeder Ziehung gezogenen Kugeln angiebt, erhoben in die so vielte Potenz, als Ziehungen vorgenommen werden. Diese Glieder sind mit den Vorzahlen des Binomiums verbunden, welche entstehen, wenn $(1+1)$ in die so vielte Potenz erhoben wird, als Kugeln in der Urne enthalten sind. Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Der Nenner des Bruches aber ist das erste Glied dieser Reihe.

Hiernach bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit für die am Anfange aufgestellte Frage durch folgende Gleichung:

247. $$W = \left[\left(\frac{s(s-1)....(s-p+1)}{1.2....3p}\right)^x - \frac{s}{1}\left(\frac{(s-1)(s-2)....(s-p)}{1.2....p}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1}\left(\frac{(s-2)(s-3)....(s-p-1)}{1.2....p}\right)^x \right.$$
$$\left. ....(-1)^{s-p}\frac{s(s-1)....(p+1)}{1.2....(s-p)}\left(\frac{p....3.2.1}{1.2....p}\right)^x\right] : \left(\frac{s(s-1)....(s-p+1)}{1.2....p}\right)^x,$$

oder auch bei anderer Darstellung, da sich die Facultät $(1.2.3....p)^x$ ausscheidet,

248. $$W = \left(\frac{s(s-1)....(s-p+1)}{s(s-1)....(s-p+1)}\right)^x - \left(\frac{(s-1)(s-2)....(s-p)}{s(s-1)....(s-p+1)}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-2)(s-3)....(s-p-1)}{s(s-1)....(s-p+1)}\right)^x$$
$$....(-1)^{s-p}\frac{s(s-1)....(p+1)}{1.2....(s-p)}\left(\frac{p(p-1)....3.2.1}{s(s-1)....(s-p+1)}\right)^x.$$

und durch Zeichen, welche das Bildungsgesetz deutlicher darstellen,

249. $$W = \left(\frac{s^{p|-1}}{s^{p|-1}}\right)^x - \frac{s}{1}\left(\frac{(s-1)^{p|-1}}{s^{p|-1}}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-2)^{p|-1}}{s^{p|-1}}\right)^x ....(-)^{s-p}\frac{s....(p+1)}{1.2.(s-p)}\left(\frac{p^{p|-1}}{s^{p|-1}}\right)^x.$$

Die Gleichung läfst sich auch so darstellen, dafs man bei der Darstellung

der Facultäten in den Zählern vom niedrigsten Factor ausgeht, und sie dann als steigende Facultäten darstellt. Dies führt zu folgendem:

$$250.\quad W = \frac{((s-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} - \frac{s}{1}\frac{((s-p)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} + \frac{s(s-1)}{1.2}\frac{((s-p-1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} - \ldots$$
$$\ldots (-)^{s-p}\frac{s(s-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots(s-p)}\frac{(1^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x}.$$

In dieser Gestalt erscheinen die Zähler als der $s$te positive Unterschied der Facultät $((-p+1)^{p\,|\,1})^x$. Deswegen ziehen wir aus dieser Darstellung folgende sehr kurze:

$$251.\quad W = \frac{\Delta^s((-p+1^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x}.$$

Diese Darstellung gewährt den Vortheil, dafs man die durch die Unterschiede gewonnenen Entwicklungen hierauf anwenden kann. Bei dieser Darstellung werden die p niedersten Glieder verschwinden, weil einer ihrer Factoren immer $=0$ werden wird.

§. 51.

Die Beantwortung der im vorhergehenden §. aufgestellten Frage führt zur Beantwortung der nachstehenden.

Aus einer Urne, die s verschiedene Kugeln enthält, werden in jeder Ziehung p Kugeln herausgenommen und wieder zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach x Ziehungen gerade q Kugeln (nicht mehr nicht weniger) herausgekommen sein werden?

Um diese Frage leichter beantworten zu können, gehen wir von folgendem speciellen Falle aus: Aus einer Urne, die 9 Kugeln enthält, wird zweimal gezogen, jedesmal werden 3 Kugeln herausgenommen, und nach der Ziehung zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade 6 Kugeln erschienen sind.

Die Frage wird sich dadurch leicht beantworten, wenn man berücksichtigt, dafs sie mit der im vorhergehenden §. gegebenen vollkommen zusammenfällt, wenn der Fall auf 6 bestimmte Elemente, statt auf 6 Elemente unter 9 beschränkt wäre. Die allgemeinere Frage vermehrt die Anzahl der günstigen Fälle, und zwar, wenn wir die schon im vorigen §. gegebene Bestimmung voraussetzen, die dort gewonnene Anzahl so viel mal, als Zusammenstellungen sechs verschiedener Elemente aus 9 gewonnen werden können. Die Zahl dieser Zusammenstellungen ist $\frac{9.8.7}{1.2.3}$, also ist die Anzahl aller, das Ereignifs begünstigenden Fälle:

$$\frac{9.8.7}{1.2.3}\left[\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2-\frac{6}{1}\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2+\frac{6.5}{2.1}\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2-\frac{6.5.4}{1.2.3}\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)\right]^2;$$

die Wahrscheinlichkeit aber entsteht, wenn die günstigen Fälle durch die Anzahl aller möglichen getheilt wird:

$$W=\frac{\frac{9.8.7}{1.2.3}\left[\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2-\frac{6}{1}\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^2+\frac{6.5}{1.2}\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^2-\frac{6.5.4}{1.2.3}\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)\right]}{\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^2}.$$

Hieraus entnimmt sich nun leicht das allgemeine Bildungsgesetz, und es ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in x Ziehungen gerade $s-q$ Kugeln herausgekommen sein werden:

252. $$W=\frac{s(s-1)\ldots.(s-q+1)}{1.2\ldots.q}\left[\left(\frac{(s-q)(s-q-1)\ldots.(s-q-p+1)}{s(s-1)\ldots.(s-p+1)}\right)^x-\frac{s-q}{1}\left(\frac{(s-q-1)\ldots.(s-q-p)}{s(s-1)\ldots.(s-+1)}\right)^x\right.$$
$$\left.+\frac{(s-q)(s-q-1)}{1.2}\left(\frac{(s-q-2)(s-q-3)\ldots.(s-q-p-1)}{s(s-1)\ldots.(s-p+1)}\right)^x-\ldots.\right].$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Wählen wir die Darstellung mittelst der Unterschiede, so gewinnen wir hieraus folgende sehr kurze:

523. $$=\frac{s(s-1)\ldots.(s-q+1)}{1.2\ldots.-q}\,\frac{\Delta^{s-q}\left((-p+1)^{p\,|\,1}\right)^x}{(s^{p\,|\,-1})^x}.$$

Die Richtigkeit dieser Schlüsse bestätigt sich durch die Betrachtung einzelner Fälle. Werden nämlich aus einer Urne, welche 9 Kugeln enthält, bei jeder Ziehung 3 Kugeln herausgenommen, und wieder zurückgeworfen, so kann es sich ereignen, dafs 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 verschiedene Kugeln erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade 3 verschiedene Kugeln erscheinen, ist:

$$\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\right)^3:\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3=\frac{84}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 4 erscheinen, ist:

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}\left[\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^3-4\right]:\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3=\frac{7560}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 5 erscheinen, ist:

$$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\left[\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^3-\frac{5}{1}\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^3+\frac{5.4}{1.2}\right]:\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3=\frac{86940}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 6 erscheinen, ist:

$$\frac{9.8.7}{1.2.3}\left[\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^3-\frac{6}{1}\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^3+\frac{6.5}{1.2}\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^3-\frac{6.5.4}{1.2.3}\right]:\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3=\frac{246960}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 7 erscheinen, ist:

$$\frac{9.8}{1.2}\left[\left(\frac{7.6.5}{1.2.3}\right)^3-\frac{7}{1}\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^3+\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)^3-\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{4.3.2}{1.2.3}\right)^3+\frac{6.7.5.4}{1.2.3.4}\right]:\left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3=\frac{204120}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 8 erscheinen, ist:

$$\frac{9}{1}\left[\left(\frac{8.7.6}{1.2.3}\right)^3 - 8\left(\frac{7.6.5}{1.2.3}\right)^3 + \ldots.\right] : \left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3 = \frac{45360}{592704}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs 9 erscheinen, ist;

$$\left[\left(\frac{9.8.7}{1.3.3}\right)^3 - 9\left(\frac{8.7.6}{1.2.3}\right)^3 + \ldots.\right] : \left(\frac{9.8.7}{1.2.3}\right)^3 = \frac{1680}{592704}.$$

Zählt man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle zusammen, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dafs entweder der eine oder der andere der genannten Fälle sich ereignen werde, und diese ist

$$\frac{84+7560+86940+246960+204120+45360+1680}{592704} = \frac{592704}{592704} = 1.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist die Einheit: d. h. eine oder der andere der genannten Fällen mufs sich, wie natürlich, ereignen.

§. 52.

Die im vorhergehenden §. beantwortete Frage bildet den Übergang zur Beantwortung folgender:

Aus einer Urne, die 5 Kugeln enthält, wird x mal gezogen, und bei jeder Ziehung werden p Kugeln herausgenommen und wieder zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens m Kugeln herausgekommen sind?

Zu bemerken ist, dafs die fragliche Zahl m der Kugeln zwischen p und s liegen mufs, und also $m < s$ und $m > p$ oder $m = p$ sein mufs. Die Frage wird beantwortet sein, wenn man die Wahrscheinlichkeit bestimmt hat, dafs entweder m, oder $m+1$, oder $m+2, \ldots.$ oder s Kugeln herausgekommen sind. Da immer die Beantwortung der Frage in der Zusammenstellung der einzelnen Fälle besteht, so hat man für die Wahrscheinlichkeit folgende Gleichung:

254.
$$W =$$
$$\left[\left(\frac{s(s-1)\ldots.(s-p+1)}{1.2\ldots.p}\right)^x - \frac{s}{1}\left(\frac{(s-1)(s-2)\ldots.(s-p)}{1.2\ldots.p}\right)^2 + \ldots.\right]$$
$$+ s\left[\left(\frac{(s-1)(s-2)\ldots.(s-p)}{1.2\ldots.p}\right)^x - \frac{s-1}{1}\left(\frac{(s-2)(s-3)\ldots.(s-p-1)}{1.2\ldots.p}\right)^x + \ldots.\right]$$
$$+ \frac{s(s-1)}{1.2}\left[\left(\frac{(s-2)(s-3)\ldots.(s-p-1)}{1.2\ldots.p}\right)^x - \frac{(s-2)}{1}\left(\frac{(s-3)(s-4)\ldots.(s-p-2)}{1.2\ldots.p}\right)^x + \ldots.\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{s(s-1)\ldots.(m+1)}{1.2\ldots.(s-m)}\left[\left(\frac{m(m-1)\ldots.(m-p+1)}{1.2\ldots.p}\right)^x - \frac{m}{1}\left(\frac{(m-1)\ldots.(m-p)}{1\ldots.p}\right)^x \ldots.\right] : \left(\frac{s(s-1)\ldots.(s-p+1)}{1.2\ldots.p}\right)^x.$$

Diese Gleichung kann man auf folgende Weise durch Unterschiede darstellen:

$$255.\quad W = \frac{\Delta^s((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} + \frac{s}{1}\cdot\frac{\Delta^{s-1}((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} + \frac{s(s-1)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^{s-2}((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x}$$
$$+ \ldots + \left(\frac{s(s-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots s-m}\right)\frac{\Delta^m((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x}.$$

Vergleicht man aber das zweite Glied der ersten Horizontal-Reihe mit dem ersten der 2ten, das 3te Glied der 1sten mit dem 2ten der 2ten und dem ersten der 3ten u. s. f., so gewinnt man folgende Darstellung:

$$s\left(\frac{(s-1)^{p\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}}\right)^x - s\left(\frac{(s-1)^{p\,|\,-1}}{1^{p\,|\,-1}}\right)^x$$
$$\frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-2)^{p\,|\,-1}}{s^{p\,|\,1}}\right)^x - 2\,\frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-2)^{p\,|\,-1}}{1^{p-1}}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-2)^{p\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}}\right)^x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und allgemein:

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-r+1)}{1.2\ldots r}\left[1 - \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} \ldots\right]\left(\frac{(s-r)^{p\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}}\right)^x$$
$$= (1-r)^r\cdot\frac{s(s-1)\ldots(s-r+1)}{1.2\ldots r}\left(\frac{(s-r)^{p\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}}\right)^x = 0.$$

und hieraus ergiebt sich, dafs alle Glieder dieser schräg liegenden Reihen, das erste Glied der $(s-m+1)$ten Reihe mit eingeschlossen, verschwinden. Die übrigen Reihen sind nicht mehr vollständig. Um die Summe der übrig bleibenden Glieder zu finden, hat man nur nöthig, die Summe der fehlenden von $(1-1)^m$ abzuziehen. Berücksichtigt man nun, dafs

$$(1-1)^m - 1 = -1,$$
$$(1-1)^m - 1 + \frac{m}{1} = \frac{m-1}{1},$$
$$(1-1)^m - 1 + \frac{m}{1} - \frac{m(m-1)}{1.2} = -\frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$
$$(1-1)^m - 1 + \frac{m}{1} - \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{(m-1)(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3},$$

u. s. w., so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

$$256.\quad W = \left[\left(\frac{s(s-1)\ldots(s-p+1)}{1.2\ldots p}\right)^x - \frac{s(s-1)\ldots m}{1.2\ldots(s-m+1)}\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}\right)^x\right.$$
$$+ \frac{m-1}{1}\,\frac{s(s-1)\ldots(m-1)}{1.2\ldots(s-m+2)}\left(\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p}\right)^x$$
$$- \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\,\frac{s(s-1)\ldots(m-2)}{1.2\ldots(s-m+3)}\left(\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-p-2)}{1.2\ldots p}\right)^x$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\right] : \left(\frac{s(s-1)\ldots(s-p+1)}{1.2\ldots p}\right)^x,$$

oder

$$257.\quad W = 1 - \frac{s(s-1)\ldots m}{1.2\ldots(s-m+1)}\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{s(s-1)\ldots(s-p+1)}\right)^x + \frac{m-1}{1}\left(\frac{s(s-1)\ldots(m-1)}{1.2\ldots(s-m+2)}\left(\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p-1)}{s(s-1)\ldots(s-p+1)}\right)^x - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{s(s-1)\ldots(m-2)}{1.2\ldots(s-m+3)}\left(\frac{(m-3)(m+4)\ldots(m-p-1)}{s(s-1)\ldots(s-p+1)}\right)^x.$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

§. 53.

Hierher gehört endlich auch die Beantwortung der Frage:

Aus einer Urne, die 5 Kugeln enthält, wird x mal gezogen, und bei jeder Ziehung werden p Kugeln herausgenommen und dann zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens n Kugeln erschienen sind.

Auch hier fällt die Gröfse der Zahl m zwischen s und p. Die Frage wird unmittelbar aus dem vorhergehenden §. dadurch beantwortet, dafs man die dort gefundene Wahrscheinlichkeit von 1 abzieht; denn die beiden Fragen ergänzen einander zur Gewifsheit. Man hat daher zur Beantwortung dieser Frage aus der Gleichung (256.) folgende:

$$258.\quad W = 1 - \frac{\Delta^s((-p+1)^{p-1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} - \frac{s}{1}\cdot\frac{\Delta^{s-1}((p-+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} - \frac{s(s-1)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^{s-2}((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x} - \ldots$$
$$\ldots + \frac{s(s-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots s-m}\cdot\frac{\Delta^n((-p+1)^{p\,|\,1})^x}{(s^{p\,|\,-1})^x},$$

oder aus (257.)

$$259.\quad W =$$
$$\frac{s(s-1)\ldots'm}{1.2\ldots(s-m+1)}\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{s(s-1)\ldots(s-p+1)}\right)^x - \frac{m-1}{1}\cdot\frac{s(s-1)\ldots(m-1)}{1.2\ldots(s-m+2)}\left(\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p)}{s(s-1)\ldots(s-p+1)}\right)^x\ldots.$$

wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dafs in dieser Darstellung $m+1$ statt m zu setzen, und danach m zu bestimmen ist.

Die Frage beantwortet sich auch durch die Zusammenstellung aller Fälle, worin p, $p+1$, $p+2$, ... n Kugeln erschienen sind. Diese Bemerkung führt zu folgender Darstellung:

260. $$W = \left[\frac{s(s-1)....(n+1)}{1.2....(s-n)}\left(\frac{n(n-1)....(n-p+1)}{1.2....p}\right)^x - \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)....(n-p)}{1.2....p}\right)^x + ...\right.$$
$$+ \frac{s(s-1)....n}{1.2....(s-n+1)}\left(\frac{(n-1)(n-2)....(n-p)}{1.2....p}\right)^x - \frac{n-1}{1}\left(\frac{(n-2)(n-3)....(n-p-1)}{1.2....p}\right)^x + ...$$
$$+ \frac{s(s-1)....(n-1)}{1.2....(s-n+2)}\left(\frac{(n-2)(n-3)....(n-p-1)}{1.2....p}\right)^x - \frac{n-2}{2}\left(\frac{(n-3)(n-4)....(n-p-1)}{1.2....p}\right)^x + ...$$
$$. . . . . .$$
$$\frac{s(s-1)....(p+2)}{1.2....(s+p-1)}\left(\frac{(p+1)p(p-1)....3.2}{1.2....p}\right)^x - \frac{p+1}{1}\left(\frac{p(p-1)....3.2.1}{1.2....p}\right)^x$$
$$\left.\frac{s(s-1)....(p+1)}{1.2....(s-p}\left(\frac{p(p-1)....3.2.1}{1.2....p}\right)^x\right] : \left(\frac{s(s-1)....(s-p+1)}{1.2....p}\right)^x,$$

oder

261. $$W = \frac{s(s-1)....(n+1)}{1.2....(s-n)} \cdot \frac{\Delta^n((-p+1)^{p|1})^x}{(s^{p|-1})^p} + \frac{s(s-1)....n}{1.2....(s-n+1)} \cdot \frac{\Delta^{n-1}((-p+1)^{p|1})^x}{(s^{p|-1})^2} + ...$$
$$...., + \frac{s(s-1)....(p+1)}{1.2....(s-p)} \cdot \frac{\Delta^p((-p+1)^{p|1})^x}{(s^{p|-1})^x}.$$

§. 54.

Wenden wir auf die in den vorhergehenden §§. gefundenen Bestimmungen über die Wahrscheinlichkeit der vorgelegten Fälle die Resultate aus der Differenzen-Rechnung an, so können wir sehr kurze Darstellungen für sie erhalten. Stellen wir die Unterschiede durch Differenziale dar, so ist, wenn $\Delta^x = 1$ gesetzt wird, aus der obigen Gleichung

262. $$W = \left[\frac{\partial^s(((-p+1)^{p|1})^x)}{(\partial x)^s} + \frac{s}{1.2} \cdot \frac{\partial^{s+1}(((-p+1)^{p|1})^x)}{(\partial x)^{s+1}} + ...\right] : (s^{p|-1})^x.$$

Die so eben gewonnene Formel führt oft zu sehr einfachen Darstellungen. Ist nämlich $s = px$, so verschwinden die höhern Differenziale als das erste, und es wird

$$\partial^s\{[(-p+1)^{p|1}]^x\} = 1.2.3.3....s,$$

und dann ist

$$W = \frac{1.2.3....s}{(s^{p|-1})^x}.$$

Ist aber s eine sehr grofse Zahl, so hat man aus dem, was oben gefunden wurde:

263. $$\log W = \int\left(S\frac{1}{s}\right)^{\partial s} - x\log(s^{p|-1})$$
$$= \int\left(S\frac{1}{s}\right)^{\partial s} - \frac{s}{p}\left[(p+1)\log s - \frac{Sp}{s} - \frac{Sp^2}{2.s^2} - \frac{Sp^3}{3.s^3} ....\right].$$

Legen wir aber bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der fraglichen Fälle die entwickelte Darstellung aus No. 53. zu Grunde, so erhalten wir:

$$W = 1 - \frac{s}{1}\left(\frac{s-p}{s}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1.2}\left(\frac{(s-p)(s-p-1)}{s(s-1)}\right)^x - \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\left(\frac{(s-p)(s-p-1)(s-p-2)}{s(s-1)(s-2)}\right)^x + \ldots.$$

Diese Reihe convergirt, wenn p, s und x grofse Zahlen sind, ziemlich stark. Sind aber s und p grofse Zahlen, so kann man ohne grofse Abweichung $s-p-1 = s-p$; $s-p-2 = s-p$ u. s. w. in den Zählern setzen, wenn man zugleich $s-1 = s$, $s-2 = s$ u. s. w. in den Nennern setzt. Denn der hiebei begangene Fehler wird sich ziemlich genau compensiren. Geschieht dies, so zieht man aus der vorstehenden Reihe folgende:

$$W = 1 - \frac{s}{1}\left(\frac{s-p}{s}\right)^x + \frac{s(s-1)}{1.2}\left[\left(\frac{s-p}{s^2}\right)^2\right]^x - \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\left[\left(\frac{s-p}{s^3}\right)^3\right]^x + \ldots.$$

und diese Darstellung fällt mit der des Binomiums

$$\left[\left(1 - \left(\frac{s-p}{s}\right)^x\right]^s$$

zusammen. Demnach ist nahe genau, bei grofsen Zahlen:

$$264. \quad W = \left[1 - \left(\frac{s-p}{s}\right)^x\right]^s.$$

Diese Gleichung zeigt, wie die Wahrscheinlichkeiten der vorliegenden Fälle mit den einzelnen Elementen, woraus sie erzeugt wird, verglichen werden können. Die Gleichung selbst wird dazu dienen, ein Element aus dem andern zu bestimmen.

Berücksichtigt man, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses immer durch einen echten Bruch dargestellt wird, und setzt man deswegen $W = \frac{r}{q}$, so dafs $q > r$ ist, so hat man

$$\frac{r}{q} = \left[1 - \left(\frac{s-p}{s}\right)^x\right]^s.$$

Aus dieser Gleichung kann man nun leicht die Anzahl der Ziehungen bestimmen, die nöthig ist, um mit irgend einem Grade von Wahrscheinlichkeit eine günstige Wette eingehen zu können. Es ist nämlich, wenn man x aus der vorliegenden Gleichung entwickelt,

$$x = \frac{\log \sqrt[s]{q} - \log(\sqrt[s]{q} - \sqrt[s]{r})}{\log s - \log(s-p)}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf das gewöhnliche Lottospiel an, welches 90 Nummern enthält, während bei jeder Ziehung 5 Nummern gezogen werden, und setzen also $s = 90$, $p = 5$ und $\frac{r}{q} = \frac{1}{2}$, so ist die Zahl der Ziehungen, welche der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entspricht, dafs alle Num-

mern heraus gekommen sein werden, 85,77. Man kann daher mit einigem Vortheile 1 gegen 1 wetten, dafs in 86 Ziehungen alle Nummern des Lotto's erschienen sein werden. Bestimmt man die Anzahl der Ziehungen, welche einer Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ entspricht, dafs alle Nummern erschienen sind, so findet man, wenn $\frac{r}{q} = \frac{3}{4}$ gesetzt wird, $x = 100{,}51$, und man kann daher 3 gegen 1 mit einigem Vortheile wetten, dafs in 101 Ziehungen alle Nummern herausgezogen sein werden. Dieses Resultat darf nicht überraschen, da die Wahrscheinlichkeit, dafs nach 200 Ziehungen alle Nummern herausgekommen sind, $= 0{,}999\ldots$ ist, und die Zahl der Grade der Wahrscheinlichkeiten, die zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{999}{1000}$ liegen, sehr grofs ist. Wird in dem Lottospiele, wo es öffentlich geduldet ist, monatlich einmal gezogen, so müssen 7 Jahre verlaufen, bis mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, dafs alle Nummern herausgekommen sein werden. Nach 9 Jahren wird solches mit grofser, nach 20 Jahren mit einer ganz nahe an die Gewifsheit grenzenden Wahrscheinlichkeit geschehen sein.

Wünscht man die Zahl der Kugeln zu bestimmen, die zusammen in jeder Ziehung herausgenommen werden müssen, um bei einer gegebenen Anzahl von Kugeln und Ziehungen irgend einen Grad von Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen aller Kugeln herbei zu führen, so setze man in vorstehender Gleichung $y = s - p$. Dann wird

$$\frac{r}{q} = \left[1 - \left(\frac{y}{s}\right)^x\right]^s,$$

und hieraus findet man

$$\log y = \log s + \frac{\log\left(\sqrt[s]{q} - \sqrt[s]{r}\right)}{x} - \frac{\log \sqrt[s]{q}}{x}.$$

Wenden wir auch diese Gleichung auf das Lottospiel an, so wird $s = 90$. Nimmt man nun $\frac{r}{q} = \frac{3}{4}$ und $x = 50$ an, so findet man $p = 11{,}45$, und man mufs zwölf Nummern bei jeder Ziehung heraus nehmen, um in 50 Ziehungen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ herbei zu führen, dafs alle Nummern erschienen sind, oder um 3 gegen 1 wetten zu können, dafs in 50 Ziehungen alle Nummern vorgekommen sind.

Anmerk. Euler und Laplace haben die vorliegende Aufgabe: jener *Opusc. analyt. T. II. p.* 337, dieser *Théorie analyt. des probl. p.* 191 behandelt.

Ungeachtet diese Meister des Calculs sie bearbeitet haben, glaubte doch der Verfasser, sie auch betrachten und seine Ansichten vorlegen zu dürfen. Über die Darstellungsweise, die Laplace gebraucht hat, sehe man das angeführte Werk nach. Die Gleichung (251.) ist auf die Darstellungsweise der Unterschiede gegründet, aber von der Laplace's verschieden. Dabei ist zu bemerken, dafs die Darstellungs- und Entwicklungsweise durch Unterschiede, die Laplace gewählt hat, der Eigenthümlichkeit der Aufgabe weniger entspricht. Denn die weitern Folgerungen, die wir hier gezogen haben, lassen sich bei der Darstellungsweise durch Unterschiede, wie aus dem Vorgetragenen selbst hervorgeht, nicht so leicht und bequem finden, und führen auch nicht auf so kurze und zweckmäfsige Gleichungen. Wie denn auch Laplace die weitern Entwicklungen, die hier gegeben sind, nicht gegeben hat.

23.

Fortsetzung des Vorigen.

Aufstufungen der einfachen Functionen.

I. Darstellung der positiven und negativen Aufstufungen der Functionen, wenn die Entwickelungsweise auf eine endliche Zunahme gegründet ist.

§. 55.

Man kann bei der Darstellung der Aufstufungen der aus zwei oder mehreren einfachen Functionen zusammengesetzten Functionen davon ausgehen, dafs man eine zusammengesetzte Function als ein Ganzes betrachtet, und sofort als eine einfache behandelt und entwickelt. Diese Art der Darstellung führt uns aber zu keinen neuen Resultaten, sondern besteht nur in der Anwendung schon bekannter Gesetze auf specielle Fälle. Wir stellen die Resultate, worauf diese Betrachtungsweise führt, hier kurz zusammen, ohne sie weiter zu benutzen.

Die Aufstufungen einer aus zwei und mehr Factoren zusammengesetzten Function lassen sich nach (10.) auf folgende Weise vorstellen:

$$265.\quad \begin{cases} \zeta^m(XY) &= (1+\Theta)^m XY = X_m Y_m + \frac{m}{1} X_{m-1} Y_{m-1} + \ldots + X_0 Y_0, \\ \zeta^m(XYZ) &= (1+\Theta)^m XYZ \\ &= X_m Y_m Z_m + \frac{m}{1} X_{m-1} Y_{m-1} Z_{m-1} + \ldots + XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Nach der Gleichung (19.):

$$266.\quad \begin{cases} \zeta^{-m}(XY) &= (\Theta+1)^{-m} \\ &= X_{-m} Y_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} Y_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} X_{-m-2} Y_{-m-2} \\ \zeta^{-m}(XYZ) &= (\Theta+1)^{-m} \\ &= X_{-m} Y_{-m} Z_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} Y_{-m-1} Z_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} X_{-m-2} Y_{-m-2} Z_{-m-2}, \end{cases}$$

u. s. w.

Nach der Gleichung (30.):

$$267.\quad \begin{cases} (XY)_m = (\zeta-1)^m XY = \zeta^m(XY) - \frac{m}{1}\zeta^{m-1}(XY) + \ldots . (-)^m XY, \\ (XYZ)_m = (\zeta-1)^m XYZ \\ \qquad = \zeta^m(XYZ) - \frac{m}{1}\zeta^{m-1}(XYZ) \ldots . (-)^m XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Nach (32.):

$$268.\quad \begin{cases} (XY)_{-m} = (\zeta-1)^{-m} XY \\ \qquad = \zeta^{-m}(XY) + \frac{m}{1}\zeta^{-m-1}(XY) + \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2}(XY) + \ldots . \\ (XYZ)_{-m} = (\zeta-1)^{-m} XYZ \\ \qquad = \zeta^{-m}(XYZ) + \frac{m}{1}\zeta^{-m-1}(XYZ) + \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2}(XYZ) + \ldots . \end{cases}$$

u. s. w.

§. 56.

Da uns aber diese Darstellungsweise nichts Neues und Brauchbares bietet, so suchen wir eine andere auf. Zu dem Ende gehen wir von der Grundidee der Aufstufungen aus. Sie ist

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_0 Y_0.$$

Zählen wir auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Function $X_1 Y_0$ zu und ab, so bleibt der Werth der Gleichung unverändert, und wir erhalten

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_1 Y_0 - X_1 Y_0 + X_0 Y_0.$$

Hierdurch haben wir den Vortheil gewonnen, dafs wir die Glieder auf der rechten Seite beliebig zusammen stellen, um kürzere Darstellungen gewinnen können. Ordnen wir sie so, wie die Glieder stehen: so wird

$$\zeta XY = X_1(Y_1 + Y_1) - Y_1(X_1 - X_0),$$

und hieraus, da $Y_1 + Y_0 = \zeta Y_0$ und $X_1 - X_0 = \Delta X$ ist, gewinnen wir für die Darstellung der ersten Aufstufung

$$269.\quad \zeta XY = X_1 \zeta Y_0 - \Delta X Y_0.$$

Ordnen wir sie aber auf folgende Art:

$$\zeta XY = X_1(Y_1 - Y_0) + Y_0(X_1 + X_0),$$

so wird, da $Y_1 - Y_0 = \Delta Y_0$ und $X_1 + X_0 = \zeta X_0$ ist,

$$270.\quad \zeta XY = X_1 \Delta Y_0 + \zeta X Y_0.$$

Zählen wir aber $X_0 Y_1$ zu und ab, so erhalten wir, wenn wir die nämlichen Veränderungen, wie vorhin, mit den genannten Gleichungen vornehmen:

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_0 Y_1 - X_0 Y_1 + X_0 Y_0 = Y_1(X_1 + X_0) - X_0(Y_1 - Y_1),$$

und hieraus

$$271. \qquad \zeta XY = \zeta X_0 Y_1 - X_0 \Delta Y_0.$$

Ordnen wir anders und so:

$$\zeta XY = Y_1(X_1 - X_0) + X_0(Y_1 + Y_0) = X(Y_1 + Y_0) + (X_1 - X_0) Y_1,$$

so erhalten wir

$$272. \qquad \zeta XY = Y_1 \Delta X_0 + X_0 \zeta Y_0 = X_0 \zeta Y_0 + \Delta X_0 Y_1.$$

Würde man $X_1 Y_1$ zu- und abzählen, so würden zwei andere, jedoch nur der Form nach von den vorstehenden verschiedene Darstellungen gewonnen werden. Die Gleichungen 270. und 272., 269. und 271. sind nur der Form, nicht aber der Realität nach verschieden.

Wir halten zuerst die letzte Gleichung als Vorschrift fest. Sie enthält die Regel, wie die erste Aufstufung einer zusammengesetzten Function durch die einfachen Functionen, Unterschied und Aufstufung derselben gefunden werden kann. Die Regel ist folgende:

Die erste Aufstufung einer aus zwei Factoren bestehenden Function wird gefunden, wenn man den ersten Factor mit der Aufstufung des zweiten Factors vervielfacht, ferner den Unterschied des ersten Factors mit dem zweiten Factor, dessen Stellenzahl man um die Einheit erhöht hat, vervielfacht und beide Producte zusammenzählt.

Dieses Geschäft läfst sich, wenn man die einfachen Functionen ausscheidet, und die Geschäfte, welche auf sie bezogen werden sollen, durch unten angehängte kleine Buchstaben bezeichnet, kurz, auf folgende Weise andeuten:

$$273. \qquad \zeta XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) XY,$$

wobei $\Theta Y = Y_1$ gesetzt ist. Diese Gleichung führt leicht zur zweiten Aufstufung, wenn mit ζ vervielfacht wird,

$$\begin{aligned} \zeta^2 XY &= (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) \zeta XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)(\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) XY \\ &= (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^2 XY. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man die dritte Aufstufung, und es wird

$$\zeta^3 XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^3 XY$$

u. s. w. Hieraus allgemein

$$274. \qquad \zeta^m XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^m XY,$$

oder in entwickelter Darstellung:

$$275. \quad \zeta^m XY = X\zeta^m Y + \frac{m}{1} \Delta X_0 \zeta^{m-1} Y_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X^0 \zeta^{m-2} Y_2 + \ldots + \Delta^m X_0 Y_m.$$

Dieselbe Darstellung hätte man auch bei allmäliger Entwickelung der zweiten Aufstufung aus den Gliedern der ersten erhalten, denn

$$\zeta^2 XY = \zeta(X_0 \zeta Y_0) + \zeta(\Delta X_0 Y_1) = X_0 \zeta^2 Y_0 + \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta^2 X_0 Y^2$$
$$= X_0 \zeta^2 Y + 2 \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta^2 X_0 Y_2$$

u. s. w.

§. 57.

Nachdem wir die positiven Aufstufungen einer aus zwei Factoren bestehenden Function gefunden haben, werden wir leicht im Stande sein, die Aufstufungen der aus drei und mehr Factoren bestehenden Functionen darzustellen, wenn wir von zwei einfachen Functionen auf drei, von drei auf vier u. s. w. übergehen. Setzen wird nämlich in (272.) statt der einfachen Function Y die zusammengesetzte YZ, so entsteht

$$\zeta(XYZ) = X_0 \zeta(YZ) + \Delta X_0 (YZ).$$

Wird $\zeta(YZ)$ nach der Gleichung (272.) behandelt, so ist:

$$\zeta(YZ) = Y \zeta Z + \Delta Y_0 Z_1.$$

Die Einführung dieses Werthes giebt:

$$\zeta XYZ = X_0 Y_0 \zeta Z + X_0 \Delta Y_0 Z_1 + \Delta X_0 Y_1 Z_1.$$

Werden die Functionen ausgeschieden und die an ihnen vorzunehmenden Geschäfte durch Anhängen kleiner Buchstaben angedeutet und deswegen das Zeichen Θ zu Hülfe genommen, so hat man

$$276. \qquad \zeta XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z) XYZ.$$

Diese Gleichung führt leicht zur Darstellung der höheren Aufstufungen. Wird nämlich mit ζ vervielfacht, so entsteht

$$\zeta^2 XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z) \zeta XYZ$$
$$= (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)(\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_z \Theta_y \Theta_z) XYZ$$
$$= (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^2 XYZ.$$

Eben so findet man die dritte Aufstufung

$$\zeta^3 XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^3 XYZ$$

und allgemein

$$277. \qquad \zeta^m XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^m XYZ.$$

Das nämliche Gesetz dehnt sich leicht auf eine Function aus, die aus vier und mehr Factoren besteht, und es ist allgemein für eine aus r einfachen Functionen bestehende Function:

$$278. \qquad \zeta^m X_1 X_2 X_3 \ldots . X_r$$
$$= (\zeta_r + \Delta_{r-1} \Theta_r + \Delta_{r-2} \Theta_{r-1} \Theta_r + \ldots . + \Delta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots . \Theta_r)^m X_1 X_2 \ldots . X_r,$$

wo die Beziehungen, die zwischen Zeichen und Functionen herrschen, durch 1, 2, 3 .... r angedeutet sind.

§. 58.

Legen wir die Gleichung (269.) zu Grunde und gehen von ihr aus und zu den höhern Aufstufungen über, so werden wir andere Resultate erhalten. Wir scheiden zu dem Ende die einfachen Functionen aus, und deuten die Beziehungen der Geschäfte, die an ihnen ausgeführt werden sollen, durch angehängte kleine Buchstaben an. Dadurch wird

$$\zeta XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x) XY.$$

Wird diese Gleichung mit ζ vervielfacht und dann die zusammengesetzte Function selbst wieder nach der hier gegebenen Vorschrift behandelt, so entsteht:

$$\zeta^2 XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)\, \zeta XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)(\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)\, XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)^2 XY.$$

Eben so gewinnen wir für die dritte Aufstufung:

$$\zeta^3 XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)^3 XY,$$

und allgemein für die $m$te:

$$279. \qquad \zeta^m XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)^m XY.$$

Die entwickelte Darstellung ist folgende:

$$288. \qquad \zeta^m XY$$

$$= X_m \zeta^m Y_0 - \frac{m}{1} \Delta X_{m-1} \zeta^{m-1} Y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X_{m-2} \zeta^{m-2} Y_0 - \ldots . (-)^m \Delta^m X_0 Y_0 .$$

Das nämliche Resultat würde durch eine andere Anordnung der einfachen Functionen herbeigeführt werden. Jedoch könnte immer nur eine Verschiedenheit in der Form Statt finden.

Sehr leicht läfst sich von einer Function, die aus zwei Factoren besteht, auf Functionen, die aus drei und mehr bestehen, übergehen. Setzen wir nämlich YZ statt Y, so wird aus (269.):

$$\zeta XYZ = X_1 \zeta(YZ) - \Delta X . YZ.$$

Wird ζYZ nach (269.) behandelt, so entsteht

$$\zeta XYZ = X_1 Y_1 \zeta Z_1 - X_1 \Delta Y_0 Z_0 - \Delta X_0 Y_0 Z_0.$$

Werden die einfachen Functionen ausgeschieden, und die öfters gewählte Bezeichnung eingeführt: so wird

$$\zeta XYZ = (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x) XYZ.$$

Das Vervielfachen mit ζ und Anwenden der vorliegenden Vorschrift auf die gefundene Darstellung giebt:

$$\begin{aligned}\zeta^2 XYZ &= (\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_x\Delta_y - \Delta_x)\zeta XYZ\\ &= (\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_x\Delta_y - \Delta_x)(\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_x\Delta_y - \Delta_x)\,XYZ\\ &= (\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_x\Delta_y - \Delta_x)^2\,XYZ.\end{aligned}$$

Eben so die dritte

$$\zeta^3(XYZ) = (\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_z\Delta_y - \Delta_z)^3\,XYZ,$$

und allgemein

$$\zeta^m XYZ = (\Theta_x\Theta_y\zeta_z - \Theta_x\Delta_y - \Delta_x)^m\,XYZ.$$

Das gefundene Gesetz dehnt sich leicht auf jede Anzahl von Functionen aus und es ist

281. $\zeta^m X_1X_2....X_r = (\Theta_1\Theta_2....\zeta_r - \Theta_1\Theta_2....\Delta_{r-1} - \Theta_1\Theta_2.\Delta_{r-2}....\Delta_1)X_1X_2X_3....X_r.$

Anmerkung. Bei allen den gefundenen Gleichungen ist zu bemerken, dafs sie noch immer in ihrer Allgemeinheit gelten, wenn auch Stellenzahlen der Functionen um eine Gröfse vermehrt oder vermindert werden.

§. 50.

In den bisherigen Gleichungen wurden die Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, durch die Aufstufungen und die Unterschiede der einfachen dargestellt. Keine Gleichung führte auf Aufstufungen allein. Man kann jedoch auch eine Darstellung finden, die nur auf den Aufstufungen der einfachen beruht. Sie hat das Merkwürdige, dafs sie nur für Functionen gilt, die aus einer ungeraden Anzahl von einfachen bestehen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Aufstufungen der 3 und 4theiligen Functionen, und gehen auf die Grundidee der Aufstufungen zurück. Es ist

$$\zeta XYZ = X_1Y_1Z_1 + X_0Y_0Z_0.$$

Zählt man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Ausdrücke $X_0Y_1Z_1$, $X_0Y_0Z_1$ in der angegebenen Ordnung zu und ab, so hat man

$$\zeta XYZ = X_1Y_1Z_1 + X_0Y_1Z_1 - X_0Y_1Z_1 - X_0Y_0Z_1 + X_0Y_0Z_1 + X_0Y_0Z_0.$$

Die Darstellung ist dem Werthe nach unverändert geblieben, und wir haben

$$\zeta XYZ = (X_1 + X_0)Y_1Z_1 - X_0(Y_1 + Y_0)Z_1 + X_0Y_0(Z + Z_0),$$

und hieraus, da $X_1 + X_0 = \zeta X_0$, $Y_1 + Y_0 = \zeta Y_1$, $Z_1 + Z_0 = \zeta Z_0$ ist, entsteht

$$\zeta(XYZ) = \zeta X_1Y_1Z_1 - X_0\zeta Y_0Z_1 + \zeta X_0Y_0Z_0.$$

Scheidet man die Function XYZ aus, und führt die Bezeichnungen ein, so ist

282. $\zeta XYZ = (\zeta_z - \zeta_y\Theta_z + \zeta_x\Theta_y\Theta_z)\,XYZ.$

Vervielfacht man mit ζ_1 und behandelt den Ausdruck auf der rechten Seite nach der vorstehenden Gleichung selbst, so hat man

$$\zeta^2 XYZ = (\zeta_z - \zeta_y \Theta_z + \zeta_x \Theta_y \Theta_z)^2 XYZ,$$

und allgemein

$$283. \qquad \zeta^m XYZ = (\zeta_z - \zeta_y \Theta_z + \zeta_x \Theta_y \Theta_z)^m XYZ.$$

Eben so erhält man für eine aus 5 Factoren bestehende Function:

$$284. \qquad \zeta^m XYZUV$$
$$= (\zeta_v - \zeta_u \Theta_v + \zeta_z \Theta_v \Theta_u - \zeta_y \Theta_z \Theta_v \Theta_u + \zeta_x \Theta_y \Theta_z \Theta_v \Theta_u)^m XYZVU$$

u. s. w., für alle Functionen, die aus einer ungeraden Anzahl einfacher Functionen bestehen. Diese Darstellungsweise aber läfst sich deswegen von einer ungeraden Anzahl Factoren gebrauchen, weil die Zahl der eingeschobenen Functionen gerade ist.

Eine ähnliche Darstellung läfst sich auch für die Functionen finden, die aus einer geraden Anzahl einfacher Functionen bestehen, wobei jedoch zu bemerken ist, dafs in diesem Falle bei einer Function der Unterschied genommen werden mufs.

Wählen wir zu dem Ende eine viertheilige Function, so ist ihre Aufstufung

$$\zeta(ZYZU) = X_1 Y_1 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 Z_0 U_0.$$

Wird auf der rechten Seite $X_0 Y_1 Z_1 U_1$, $X_0 Y_0 Z_1 U_1$, $X_0 Y_0 Z_0 U_1$ in der vorstehenden Ordnung zu und ab gezählt, so ist

$$\begin{aligned}\zeta(XYZU) = {} & X_1 Y_1 Z_1 U_1 + X_0 Y_1 Z_1 U_1 - X_0 Y_1 Z_1 U_1 - X_0 Y_0 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 Z_1 U_1 \\ & + X_0 Y_0 Z_0 U_1 - X_0 Y_0 Z_0 U_1 + X_0 Y_0 Z_0 U_0 \\ = {} & (X_1 + X_0) Y_1 Z_1 U_1 - X_0 (Y_1 + Y_0) Z_1 U_1 + X_0 Y_0 (Z_1 + Z_0) U_1 \\ & - X_0 Y_0 Z_0 (U_1 - U_0),\end{aligned}$$

und hieraus

$$\zeta(XYZU) = \zeta XYZ_1 U_1 - X_0 \zeta Y_0 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 \zeta Z{:}\, U_1 - X_0 Y_0 Z_1 \Delta U_0,$$

oder

$$\zeta XYZU = (\zeta_z \Theta_y \Theta_z \Theta_u - \zeta_y \Theta_z \Theta_u + \zeta_z \Theta_u - \Delta_u) XYZU.$$

Dies führt zu folgender allgemeinen Darstellung:

$$285. \qquad \zeta^m XYZU = \zeta_x \Theta_{y,z,u} - \zeta_y \Theta_{z,u} + \zeta_z \Theta_u - \Delta_u)^m XYZU.$$

Diese Darstellung läfst sich leicht auf jede Function, die aus einer geraden Anzahl Factoren besteht, ausdehnen. Sie führt den Unterschied der letzten Function mit sich, könnte jedoch bei einer andern Anordnung auch mit dem einer andern Function sich verbinden.

§. 60.

Da diese Darstellungen sämmtlich aus der Grundidee der Aufstufungen für einfache Functionen abgeleitet wurden, so müssen auch von ihnen alle Folgerungen gelten, die von jenen gelten. Wir haben bei den Aufstufungen der einfachen Functionen gefunden, dafs im Allgemeinen die nämlichen Gesetze für die positiven Aufstufungen, wie für die negativen gelten; demnach gelten auch die so eben gefundenen Gesetze nicht nur von den positiven, sondern auch von den negativen Aufstufungen. Aus §. 56. ergeben sich also die nachstehenden Gleichungen, und zwar aus (274.):

$$286. \qquad \zeta^m XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^{-m} XY,$$

oder bei anderer Stellung:

$$\zeta^{-m} XY = (\Delta_x \Theta_y + \zeta_y)^{-m} XY,$$
$$\zeta^{-m} XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^{-m} XYZ$$

u. s. w., aus (278.):

$$287. \qquad \zeta^{-m} X_1 X_2 \ldots . X_r$$
$$= (\zeta_r + \Delta_{r-1} \Theta_r + \Delta_{r-2} \Theta_{r-1} \Theta_r + \ldots . + \Delta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots . \Theta_r)^{-m} X_1 X_2 \ldots . X_r .$$

Auch die §. 58. gefundenen Gleichungen gelten für negative Aufstufungen, und man gewinnt aus No. 279.:

$$288. \quad \begin{cases} \zeta^{-m} XY = (\Theta_x \zeta_y - \Delta_x)^{-m} XY, \\ \zeta^{-m} XYZ = (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x)^{-m} XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Auch die §. 59. aufgefundenen Gleichungen gelten für negative Aufstufungen. Stellen wir die entwickelten Darstellungen der negativen Aufstufungen für zweitheilige Functionen zusammen, so erhalten wir aus (286.):

$$289. \quad \begin{cases} \zeta^{-1}(XY) = X_0 \zeta^{-1} Y_0 - \Delta X_0 \zeta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X_0 \zeta^{-3} Y_2 - \ldots . \\ \zeta^{-2}(XY) = X_0 \zeta^{-2} Y_0 - 2 \Delta X_0 \zeta^{-3} Y_1 + 3 \Delta^2 X_0 \zeta^{-4} Y_2 - \ldots . \\ \zeta^{-3}(XY) = X_0 \zeta^{-3} Y_0 - 3 \Delta X_0 \zeta^{-4} Y_1 + 6 \Delta^2 X_0 \zeta^{-5} Y_2 - \ldots . \end{cases}$$

u. s. w.

Diese Gleichungen gelten für jede zusammengesetzte Function, wie auch die Stellenzahlen der zusammengesetzten Function beschaffen sein mögen. Erhöhen wir sie daher um p, so erhalten wir:

$$290. \quad \begin{cases} \zeta^{-1} X_p Y_p = X_p \zeta^{-1} Y_p - \Delta X_p \zeta^{-2} Y_{p+1} + \Delta^2 X_p \zeta^{-3} Y_{p+2} - \ldots . \\ \zeta^{-2} X_p Y_p = X_p \zeta^{-2} Y_p - 2 \Delta X_p \zeta^{-3} Y_{p+1} + 3 \Delta^2 X_p \zeta^{-4} Y_{p+2} - \ldots . \\ \zeta^{-3} X_p Y_p = X_p \zeta^{-3} Y_p - 3 \Delta X_p \zeta^{-4} Y_{p+1} + 6 \Delta^2 X_p \zeta^{-5} Y_{p+2} - \ldots . \end{cases}$$

u. s. w.

Aus (288.) aber erhalten wir folgende Darstellungen:

$$291.\quad \begin{cases} \zeta^{-1}XY = X_{-1}\zeta^{-1}Y_0 + \Delta X_{-2}\zeta^{-2}Y_0 + \Delta^2 X_{-3}\zeta^{-3}Y_0 + \ldots. \\ \zeta^{-2}XY = X_{-2}\zeta^{-2}Y_0 + 2\Delta X_{-3}\zeta^{-3}Y_0 + 3\Delta^2 X_{-4}\zeta^{-4}Y_0 + \ldots. \\ \zeta^{-3}XY = X_{-3}\zeta^{-3}Y_0 + 3\Delta X_{-4}\zeta^{-4}Y_0 + 6\Delta^2 X_{-5}\zeta^{-5}Y_0 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Werden die Stellenzahlen in p erhöht, so wird

$$292.\quad \begin{cases} \zeta^{-1}X_pY_p = X_{p-1}\zeta^{-1}Y_p + \Delta X_{p-2}\zeta^{-2}Y_p + \Delta^2 X_{p-3}\zeta^{-3}Y_p + \ldots. \\ \zeta^{-2}X_pY_p = X_{p-2}\zeta^{-2}Y_p + 2\Delta X_{p-3}\zeta^{-3}Y_p + 3\Delta^2 X_{p-4}\zeta^{-4}Y_p + \ldots. \\ \zeta^{-3}X_pY_p = X_{p+3}\zeta^{-3}Y_p + 3\Delta X_{p-4}\zeta^{-4}Y_p + 6\Delta^2 X_{p-5}\zeta^{-5}Y_p + \ldots. \end{cases}$$

u. s. w.

§. 61.

Eine andere, sehr einfache Methode, die Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen zu gewinnen, ergiebt sich durch die Darstellung mittels der Unterschiede. Gehen wir von der Grundidee der Aufstufungen aus, so ist die erste Aufstufung einer zweitheiligen Function:

$$\zeta XY = X_1Y_1 + XY = (X+\Delta X)(Y+\Delta Y) + XY.$$

Die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke lassen sich so darstellen:

$$X_1 = (X+\Delta X) = (1+\Delta_x)X,$$
$$Y_1 = (Y+\Delta Y) = (1+\Delta_y)Y,$$

wo Δ_x, Δ_y wie oben, die Beziehung der Zunahme auf ihre ursprüngliche Function bezeichnen. Die Einführung dieser Darstellungen erzeugt die Gleichung

$$293.\quad \zeta XY = (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)XY + XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]XY.$$

Wird diese Gleichung durch ζ vervielfacht, so entsteht

$$\zeta^2 XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]\zeta XY.$$

Wird hierin ζXY nach (293.) behandelt, so hat man

$$\zeta^2 XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1][(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]XY$$
$$= [1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]^2 XY.$$

Eben so gewinnt man für die dritte Aufstufung

$$\zeta^3 XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]^2\zeta XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]^3 XY.$$

Dieser Entwicklungsgang bleibt unverändert derselbe, und es ist allgemein:

$$294.\quad \zeta^m XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)+1]^m XY.$$

Die Schlüsse, die von zweitheiligen Functionen gemacht wurden, lassen sich leicht auf dreitheilige ausdehnen. Es ist

$$\zeta XYZ = X_1Y_1Z_1 + X_0Y_0Z_0.$$

Da nun

$$X_1 = X + \Delta X = (1+\Delta_x)X,$$
$$Y_1 = Y + \Delta Y = (1+\Delta_y)Y,$$
$$Z_1 = Z + \Delta Z = (1+\Delta_z)Z$$

gesetzt werden kann, so ist

$$\zeta XYZ = (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)XYZ + XYZ$$
$$= [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)+1]XYZ.$$

Wendet man die gleiche Ableitungs-Methode wie vorhin an, so findet man allgemein:

$$\zeta^m XYZ = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)+1]^m XYZ.$$

u. s. w. für eine Function, die aus r einfachen Functionen zusammengesetzt ist:

295. $$\zeta^m(X_1X_2....X_r) = [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)....(1+\Delta_r)+1]X_1X_2X_3....X_r.$$

II. Darstellung der positiven und negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, mit Hülfe der Differenziale.

§. 62.

Wie die Aufstufungen der einfachen Functionen, so auch lassen sich die der zusammengesetzten Differenziale darstellen. Der Taylorsche Lehrsatz giebt hierzu die bekannten Reihen:

$$X+\Delta X = X + \frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + \frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + ...$$
$$= (1+\Delta x)X = e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} X,$$
$$Y+\Delta Y = Y + \frac{\Delta y.\partial X}{1.\partial y} + \frac{(\Delta y)^2\partial^2 Y}{1.2.(\partial y)^2} + \frac{(\Delta y)^3\partial^3 Y}{1.2.3.(\partial y)^3} + ...$$
$$= (1+\Delta y)X = e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} Y,$$
$$Z+\Delta Z = Z + \frac{\Delta z.\partial z}{1.\partial z} + \frac{(\Delta z)^2\partial^2 Z}{1.2.(\partial z)^2} + \frac{(\Delta z)^3\partial^3 Z}{1.2.3.(\partial z)^3} + ...$$
$$= (1+\Delta z)Z = e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}} Z,$$

wenn

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ...$$

ist. Legen wir nun die im vorhergenden §. gewonnenen Gleichungen zu Grunde, so gewinnen wir aus der Gleichung (293.), durch Einführung

der schicklichen Werthe, für die Darstellung der ersten Aufstufung einer zweitheiligen Function durch Differenziale:

$$296. \quad \zeta XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial y}+\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)XY.$$

Die zweite Aufstufung wird durch Vervielfachen mit ζ gefunden, und es ist

$$\zeta^2 XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)\zeta XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)XY$$
$$= \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)^2 XY.$$

Für die dritte Aufstufung erhalten wir

$$\zeta^3 XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)^3 XY,$$

und allgemein für die $m$te Aufstufung einer zweitheiligen Function:

$$297. \quad \zeta^m XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}+1\right)^m XY.$$

Der Übergang von einer zweitheiligen Function zu einer dreitheiligen ist leicht. Aus §. 61. erhalten wir

$$\zeta XYZ = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}.e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}}+1\right)XYZ,$$

und

$$\zeta^m XYZ = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}.e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial.z}}+1\right)XYZ;$$

für eine viertheilige ist

$$\zeta^m XYZU = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}.e^{\frac{\Delta z.z}{\partial z}}.e^{\frac{\Delta u.\partial}{\partial u}}+1\right)^m XYZU$$

u. s. w. Die vorstehenden Darstellungen lassen sehr leicht den Schluſs auf Functionen zu, die eine beliebige Zahl von Factoren haben.

§. 63.

Die im vorhergenden §. gegebenen Formeln für die Darstellung der verschiedenen Aufstufungen mittelst der Differenziale gelten nicht nur für ein positives, sondern auch für ein negatives m, und sind allgemein. Ihre Darstellung ist jedoch nur formell. Um auch brauchbare Darstellungen für negative Aufstufungen, ins besondere zum Behufe weiterer Entwickelungen, zu gewinnen, suchen wir auf einem andern Wege entwickelte Reihen, betrachten aber nur die Entwickelungen zweitheiliger Functionen, und legen zu dem Ende folgende aus (275.) entlehnte allgemeine Reihe zu Grunde:

$$\zeta^{-m} X_p Y_p = X_p \zeta^{-m} Y_p - m \Delta X_p \zeta^{-m-1} X_p + \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta^2 X_p \zeta^{-m+2} X_{p+2} \ldots.$$

worin die negativen Aufstufungen einer zusammengesetzten Function auf

die negativen Aufstufungen und positiven Unterschiede der einfachen Functionen zurückgeführt sind. Die negativen Aufstufungen behalten wir bei. Die positiven Unterschiede stellen wir aber mittels der Gleichungen des §. 42. dar, und wählen zu dem Ende statt der Gleichung (212.), der Kürze wegen, folgende Darstellung:

$$\Delta^m X_p = 1.2.3....m C_1^m \frac{(\Delta x)^m \partial^m X_p}{1.2....m(\partial x)^m} + 1.2....m C_2^m \frac{(\Delta x)^{m+1} \partial^{m+1} X_p}{1.2....(m+1)(\partial x)^{m+1}}$$
$$+ 1.2.3....m\, C_3^m \frac{(\Delta x)^{m+2} \partial^{m+2} X_p}{1.2....(m+1)(\partial x)^{m+2}} + ...$$

Dies führt zu folgender Darstellung:

298. $$\zeta^{-m} X_p Y_p = \zeta^{-m} Y_p X_p$$
$$- m\zeta^{-m-1} Y_{p+1}\left[\frac{\Delta x.\partial X_p}{1.\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3} + ...\right]$$
$$+ \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2} Y_{p+2}\left[1.2.\frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2} + 1.2.\frac{C_2^2 (\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3} + 1.2.\frac{C^2 (\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4} + ...\right]$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\zeta^{-m-3} Y_{p+3}\left[1.2.3.\frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3(\partial x)^3} + 1.2.3.\frac{C_2^3 (\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}\right.$$
$$\left. + 1.2.3.\frac{C_3^3 (\Delta x)^5 \partial^5 X_p}{1.2.3.4.5.(\partial x)^5} + ...\right]$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}\zeta^{-m-4} Y_{p+4}\left[1.2.3.4.\frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4} + 1.2.3.4.\frac{C_2^4 (\Delta x)^5 \partial^5 X_p}{1.2....6.(\partial x)^5}\right.$$
$$\left. + 1.2.3.4.\frac{C_3^4 (\Delta x)^6 \partial^6 X_p}{1.2....5.(\partial x)^6} + ...\right]$$
. . . . . .

Diese Gleichung ist nach den negativen Aufstufungen der Function Y_p geordnet. Ordnen sie wir nach den Differenzialen der Function X_p, so erhalten wir

299. $$\zeta^{-m} X_p Y_p$$
$$= X_p \zeta^{-m} Y_p$$
$$- \frac{\Delta x.\partial X_p}{1.\partial x}.\frac{m}{1}\zeta^{-m-1} Y_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2}\left[- C_2^1 \frac{m}{1}\zeta^{-m-1} Y^{p+1} + 1.2.C_1^2 \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2} Y_{p+2}\right]$$
$$+ \frac{(\Delta x).^3 \partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3}\left[- C_3^1 \frac{m}{1}\zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2.C_2^2 \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2} Y_{p+2}\right.$$
$$\left. - 1.2.3.C_1^3 \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\zeta^{-m-3} Y_{p+3}\right]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}\left[- C_4^1 \frac{m}{1}\zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2.C_2^2 \frac{m(m+1)}{1.2.3}\zeta^{-m-2} Y_{p+2}\right.$$
$$\left. - 1.2.3.C_2^2 \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\zeta^{-m-3} Y_{p+3} + 1.2.3.4.C_1^4 \frac{m....(m+3)}{1.2.3.4}\zeta^{-m-4} Y_{p+4}\right],$$

u. s. w.

Man erkennt leicht, dafs die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen, mit $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m+1)}{1.2}$, $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$ ...., mit den Facultäten 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, ... und mit C .... verbunden sind. Die obern Zahlen von C fallen, die obern steigen. Die Summen dieser Zahlen übertreffen die Exponenten des Differenzials um die Einheit. Das allgemeine Gesetz liegt in folgender Reihe:

$$\frac{(\Delta x)^r \partial^r X_p}{1.2....r(\partial x)^r}\Big[-\frac{m}{1}C_r^1 \zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2\, C_{r-1}^2 \frac{m(m+1)}{1.2}\zeta^{-m-2} Y_{p+2} + \ldots$$
$$(-)^r 1.2....r\, C_1^r \frac{m(m+2)....(m+r-1)}{1.2....r}\zeta^{-m-r} Y_{p+r}\Big].$$

Aus dieser allgemeinen Bildungsweise (299.) leiten sich leicht folgende specielle Fälle ab. Wird $m=1$ gesetzt, so ist

300.
$$\zeta^{-1} X_p Y_p$$
$$= X_p \zeta^{-1} Y_p - \frac{\Delta x . \partial X_p}{\partial x}\zeta^{-2} Y_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2}[-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 2\zeta^{-3} Y_{p+2}]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3\,(\partial x)^3}[-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 6\zeta^{-3} Y_{p+2} - 6\zeta^{-4} Y_{p+3}]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4 . \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}[-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 14\zeta^{-3} Y_{p+2} - 36\zeta^{-4} Y_{p+3} + 24\zeta^{-5} Y_{p+4}].$$
. . . . . .

Wird $m=2$ gesetzt, so entsteht

$$\zeta^{-2} X_p Y_p$$
$$= X_p \zeta^{-2} Y_p - 2\frac{(\Delta x)\partial X_p}{\partial x}\zeta^{-3} Y_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2}[-2\zeta^{-3} Y_{p+1} + 6\zeta^{-4} Y_{p+2}]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3}[-2\zeta^{-3} Y_{p+1} + 15\zeta^{-4} Y_{p+2} - 24\zeta^{-5} Y_{p+3}]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}[-2\zeta^{-4} Y_{p+1} + 42\zeta^{-4} Y_{p+2} - 144\zeta^{-5} Y_{p+3} + 120\zeta^{-6} Y_{p+4}].$$
. . . . . .

§. 64.

Legen wir die aus (288.) entnommene Gleichung

$$\zeta^{-m} X_p Y_p = X_{p-m}\zeta^{-m} Y_p + \frac{m}{1}\Delta X_{p-m-1}\zeta^{-m-1} Y_p + \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^2 X_{p-m-2}\zeta^{-m-2} X_p + \ldots.$$

zu Grunde, und stellen die Unterschiede durch Differenziale dar, während wir die negativen Aufstufungen der andern Function beibehalten, so erhal-

ten wir folgende Darstellung:

$$301. \quad \zeta^{-m} X_p Y_p$$

$$= X_{p-m} \zeta^{-m} Y_p$$

$$+ m \zeta^{-m-1} Y_p \left[\frac{\Delta x \,.\, \partial X_{p-m-1}}{1 \,.\, \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{p-m-1}}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-1}}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots . \right]$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-1} Y_p \left[1.2. \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{-m-1}}{1.2\,(\partial x)^2} + 1.2. \frac{C_2^2 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-2}}{1.2.3\,(\partial x)^3} \right.$$

$$\left. + 1.2. \frac{C_2^3 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-2}}{1.2.3.4.\,(\partial x)^4} + \ldots . \right]$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \zeta^{-m-3} Y_p \left[1.2.3. \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-3}}{1.2.3\,(\partial x)^2} + 1.2.3 \frac{C_2^3 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-3}}{1.2.3.4\,(\partial x)^4} \right.$$

$$\left. + 1\,2.3. \frac{C_3^3 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{p-m-3}}{1.2\;3.4.5\,(\partial x)^5} + \ldots . \right]$$

$$+ \frac{m....(m+3)}{1.2.3\;4} \zeta^{-m-4} Y_p \left[1.2.3.4. \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-4}}{1.2.3.4\,(\partial x)^4} + 1.2.3.4. \frac{C_2^4 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{p-m-4}}{1.2...5\,(\partial x)^5_4} \right.$$

$$\left. + 1.2.3.4. \frac{C_3^4 (\Delta x)^6}{1.2.....6\,(\partial x)^6} \frac{\partial^6 X_{p-m-4}}{} + \ldots . \right]$$

u. s. w.

Diese Reihe ist keiner Umformung, wie die Gleichung (298.), fähig, weil die Stellenzahlen der Functionen, welche mit den Differenzialen verbunden sind, nicht unter einander harmoniren.

Die in diesem §. mitgetheilten Reihen sind ihrer Natur nach unendlich; sie brechen ab, wenn die Differenziale der Functionen, die in der Darstellung vorkommen, in 0 übergehen.

24.

Fortsetzung des Vorigen.

Unterschiede und Abstufungen der zusammengesetzten Functionen.

I. Darstellung der positiven und negativen Unterschiede der zusammengesetzten Functionen, wenn die Entwicklungsweise auf eine endliche Zunahme gegründet ist.

§. 65.

Man kann bei der Darstellung der Unterschiede zusammengesetzter Functionen die Function selbst als ein Ganzes oder Einfaches betrachten und sie nach den Vorschriften, welche von den Unterschieden der einfachen Functionen gelten, behandeln. Diese Art der Darstellung führt zu keinem neuen Resultate, und besteht nur in der Anwendung schon bekannter Gleichungen auf specielle Fälle; deswegen benutzen wir sie nicht weiter.

Eine andere Methode der Entwicklung ist: die Darstellung der Unterschiede zusammengesetzter Functionen auf die der einfachen, woraus sie bestehen, zurückzuführen. Wir theilen hier folgende Methoden mit, und verweisen wegen der übrigen auf die sechste Abhandlung unseres Differenzial-Calculs, wo noch mehrere Methoden angegeben sind.

Auch hier gehen wir von der Grundidee des Unterschiedbildens der einfachen Function aus, entwickeln aus ihr den Unterschied einer aus zwei Factoren bestehenden Function und gehen von diesem zu dem der drei- und vier- etc. theiligen über. Es ist aus (133.):

$$\Delta(XY) = X_1 X_1 - XY = (X+\Delta X)(Y+\Delta Y) - XY.$$

Stellen wir nun $X+\Delta X$ und $Y+\Delta Y$ so dar, dafs wir die einfachen Functionen ausscheiden, so wird $X+\Delta X=(1+\Delta_x)X$ und $Y+\Delta Y=(1+\Delta_y)Y$. Führen wir diese Darstellung in obige ein, so entsteht:

$$\Delta(XY) = (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)XY - XY.$$

Dies führt zu folgender Darstellung für den ersten Unterschied einer aus

zwei Factoren bestehenden Function:

$$302. \qquad \Delta(XY) = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]\,XY.$$

Wird diese Gleichung mit Δ vervielfacht, so entsteht

$$\Delta^2 XY = [(1+\Delta_z)(1+\Delta_y)-1]\,\Delta XY.$$

Wird hierin ΔXY selbst wieder nach (302.) behandelt, so entsteht

$$\Delta^2 XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^2\,XY.$$

Eben so gewinnen wir

$$\Delta^3 XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^3\,XY,$$

und hieraus allgemein

$$303. \qquad \Delta^m XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^m\,XY.$$

Der Übergang auf die Unterschiede dreitheiliger Functionen ist leicht. Es ist nach (133.):

$$\Delta(XYZ) = X_1 Y_1 Z_1 - X_0 Y_0 Z_0 = (X+\Delta X)(Y+\Delta Y)(Z+\Delta Z) - XYZ,$$

oder, wenn die Bezeichnung $(X+\Delta X) = (1+\Delta_x)X$, $Y+\Delta Y = (1+\Delta_y)Y$, $Z+\Delta Z = (1+\Delta_z)Z$ eingeführt und die Functionen ausgeschieden werden,

$$\Delta(XYZ) = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1]\,XYZ.$$

Die weitern Ableitungen führen zu folgender Darstellung:

$$\Delta^m(XYZ) = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1]^m\,XYZ,$$

und hieraus allgemein, für eine aus r einfachen Functionen zusammengesetzte Function,

$$304. \qquad \Delta^m X_1 X_2 \ldots X_r = [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)\ldots(1+\Delta_r)-1]^m\,X_1 X_2 \ldots X_r.$$

§. 66.

Eine zweite Ableitungsweise der Unterschiede zusammengesetzter Functionen gewinnen wir aus der Gleichung

$$\Delta(XY) = X_1 Y_1 - X_0 Y_0$$

dadurch, dafs wir $X_0 Y_1$ auf der rechten Seite zu- und abzählen, wodurch der Werth der Gleichung nicht gestört wird. Hierdurch entsteht:

$$\Delta(XY) = X_1 Y_1 + X_0 Y_1 + X_0 Y_1 - X_0 Y_0 = (X_1 - X_0)\,Y_1 + X_0\,(Y_1 - Y_0).$$

Da nun $Y_1 - Y_0 = \Delta Y_0$ und $X_1 - X_0 = \Delta X_0$ ist, erhalten wir hieraus, bei umgekehrter Ordnung,

$$305. \qquad \Delta(XY) = X_0 \Delta Y + \Delta X.\,Y_1.$$

Bezeichnen wir hierin Y_1 durch ΘY, scheiden die Functionen aus, und behalten die Beziehungen zwischen ihnen und ihren Geschäften bei, so wird hieraus

$$\Delta(XY) = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)\,XY.$$

Diese Gleichung führt leicht zu der Darstellung der höhern Unterschiede.

Vervielfachen wir mit Δ, so ist:

$$\Delta^2 XY = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)\Delta XY = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)(\Delta_y + \Delta_x \Theta_y) XY,$$

also

$$\Delta^2 XY = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)^2 XY;$$

eben so

$$\Delta^3 XY = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)^3 XY,$$

und allgemein

306. $$\Delta^m XY = (\Delta_y + \Delta_x \Theta_y)^m XY.$$

Die entwickelte Darstellung, wozu diese Gleichung führt, ist

307. $$\Delta^m XY = X\Delta^m Y + \frac{m}{1}\Delta X \Delta^{m-1} Y_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 X \Delta^{m-2} Y_2 + \ldots.$$
$$+ \frac{m}{1}\Delta^{m-1} X \Delta Y_{m-1} + \Delta^m X . Y_m .$$

Wählen wir eine andere Anordnung der einfachen Functionen, so ist

308. $$\Delta^m XY = (\Delta_x + \Delta_y \Theta_x) XY.$$
$$= Y\Delta^m X + \frac{m}{1}\Delta Y \Delta^{m-1} X_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 Y \Delta^{m-2} X_2 + \ldots.,$$

und man erkennt, dafs bei den Unterschieden, eben so, wie bei den Aufstufungen, die Anordnung der einfachen Functionen ganz der Willkür überlassen ist.

Auf gleiche Weise werden die Unterschiede einer dreitheiligen Function gefunden. Es ist nach (133.)

$$\Delta(XYZ) = X_1 Y_1 Z_1 - X_0 Y_0 Z_0 .$$

Wird auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $X_0 Y_1 Z_1$, $X_0 Y_0 Z_1$ ab- und zugezählt, so bleibt der Werth der Gleichung unverändert, und es ist

$$\Delta(XYZ) = X_1 Y_1 Z_1 - X_0 Y_1 Z_1 + X_0 Y_1 Z_1 - X_0 Y_0 Z_1 + X_0 Y_0 Z_1 - X_0 Y_0 Z_0$$
$$= (X_1 - X_0) X_1 Z_1 + X_0 (Y_1 - Y_0) Z_1 + X_0 Y_0 (Z_1 - Z_0).$$

Da nun $X_1 - X_0 = \Delta X$, $Y_1 - Y_0 = \Delta Y$, $Z_1 - Z_0 = \Delta Z$ ist, so erhalten wir

$$\Delta(XYZ) = X_0 Y_0 \Delta Z + X_0 \Delta Y . Z_1 + \Delta X_0 . Y_1 Z_1 ,$$

oder, wenn man die Functionen ausscheidet und Zeichen einführt:

$$\Delta(XYZ) = (\Delta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z) XYZ.$$

Das Vervielfachen mit Δ führt zur Darstellung des zweiten Unterschiedes. Es ist

$$\Delta^2(XYZ) = (\Delta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)\Delta XYZ = (\Delta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^2 XYZ,$$

u. s. w.

$$\Delta^m(XYZ) = (\Delta_z + \Delta_y \Theta_z + \Delta_x \Theta_y \Theta_z)^m XYZ;$$

hieraus allgemein, für den $m$ten Unterschied einer aus r einfachen Functionen bestehenden Function:

309. $$\Delta^m X_1 X_2 \ldots . X_r = (\Delta_r + \Delta_{r-1}\Theta_r + \ldots . + \Delta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots . \Theta_r)^m X_1 X_2 \ldots . X_r .$$

§. 67.

Die in den beiden vorhergehenden §§. gefundenen Bildungsweisen gelten zuerst zwar für positive Unterschiede; sie sind aber nicht desto weniger allgemein, und gelten auch für negative. Dies zeugt sich leicht aus folgendem.

Vervielfachen wir die Gleichung (302.) mit Δ^{-1}, so ist

$$XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]\Delta^{-1}(XY),$$

und hieraus, wenn mit dem in Klammern eingeschlossenen Ausdrucke gemessen wird:

$$310. \quad \Delta^{-1}(XY) = \frac{XY}{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1} = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^{-1}XY.$$

Eben so erhalten wir aus (303.), wenn wir mit Δ^{-m} vervielfachen, und berücksichtigen, dafs $\Delta^m\Delta^{-m} = \Delta^0 = 1$ ist,

$$XY = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^m\Delta^{-m}(XY);$$

also

$$311. \quad \Delta^{-m}(XY) = \frac{XY}{[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^m} = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1]^{-m}XY.$$

Auf gleiche Weise gewinnt man auch ganz allgemein

$$312. \quad \Delta^{-m}(X_1X_2\ldots.X_r) = [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)\ldots.(1+\Delta_r)-1]^{-m}X_1X_2\ldots.X_r.$$

Gehen wir von der Gleichung (305.) aus und vervielfachen mit Δ^{-1}, so wird

$$XY = (\Delta_y+\Delta_x\Theta_y)\Delta^{-1}XY,$$

und hieraus, wenn mit dem eingeklammerten Ausdrucke gemessen wird,

$$\Delta^{-1}(XY) = \frac{XY}{\Delta_y+\Delta_x\Theta_y} = (\Delta_y+\Delta_x\Theta_y)^{-1}XY.$$

Eben so für den $m$ten negativen Unterschied:

$$313. \quad \Delta^{-m}(XY) = (\Delta_y+\Delta_x\Theta_y)^{-m}XY,$$

oder, bei entwickelter Darstellung,

$$314. \quad \Delta^{-m}(XY) = X\Delta^{-m}Y - \frac{m}{1}\Delta X\Delta^{-m-1}Y_1 + \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^2X\Delta^{-m-2}Y_2 - \ldots.$$

Diese Gleichung führt auf eine unendliche Reihe.

Aus (309.) erhalten wir auf diesem Wege

$$315. \quad \Delta^{-m}(X_1X_2\ldots.X_r) = (\Delta_1+\Delta^{r-1}\Theta_r+\ldots.+\Delta_1\Theta_2\Theta_3\ldots.\Theta_r)X_1X_2X_3\ldots.X_r.$$

Wir geben einige entwickelte specielle Fälle der negativen Unterschiede zweitheiliger Functionen. Aus (314.) erhalten wir:

$$316. \quad \begin{cases} \Delta^{-1}XY = X\Delta^{-1}Y - \Delta X.\Delta^{-2}Y_1 + \Delta^2X\Delta^{-3}Y_2 - \Delta^3X\Delta^{-4}Y_3+\ldots. \\ \Delta^{-2}XY = X\Delta^{-2}Y - 2\Delta X.\Delta^{-3}Y_1 + 3\Delta^2X\Delta^{-4}Y_2 - 4\Delta^3X\Delta^{-5}Y_3+\ldots. \\ \Delta^{-3}XY = X\Delta^{-3}Y - 3\Delta X.\Delta^{-4}Y_1 + 6\Delta^2X\Delta^{-5}Y_2 - 10\Delta^3X\Delta^{-6}Y_3+\ldots. \\ \Delta^{-4}XY = X\Delta^{-4}Y - 4\Delta X.\Delta^{-5}Y_1 + 10\Delta^2X\Delta^{-6}Y_2 - 20\Delta^3X\Delta^{-7}Y_3+\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

u. s. w. Berücksichtigt man, dafs die Stellenzahlen dieser entwickelten Darstellungen, unbeschadet ihre Gültigkeit, um gleichviel erhöht oder erniedrigt werden können, so hat man auch

$$317.\quad \begin{cases} \Delta^{-1} X_p Y_p = X_p \Delta^{-1} Y_p - \Delta X_p . \Delta^{-2} Y_{p+1} + \Delta^2 X_p . \Delta^{-3} Y_{p+2} - \Delta^3 X_p . \Delta^{-4} Y_{p+3} + \ldots. \\ \Delta^{-2} X_p Y_p = X_p \Delta^{-2} Y_p - 2\Delta X_p . \Delta^{-3} Y_{p+1} + 3\Delta^2 X_p . \Delta^{-4} Y_{p+2} - 4\Delta^3 X_p . \Delta^{-5} Y_{p+3} + \ldots. \\ \Delta^{-3} X_p Y_p = X_p \Delta^{-3} Y_p - 3\Delta X_p . \Delta^{-4} Y_{p+1} + 6\Delta^2 X_p . \Delta^{-5} Y_{p+2} - 10\Delta^3 X_p . \Delta^{-6} Y_{p+3} + \ldots. \\ \Delta^{-4} X_p Y_p = X_p \Delta^{-4} Y_p - 4\Delta X_p . \Delta^{-5} Y_{p+1} + 10\Delta^2 X_p . \Delta^{-6} Y_{p+2} - 20\Delta^3 X_p . \Delta^{-7} Y_{p+3} + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

u. s. w.

Wegen anderer Methoden und wegen entwickelter Darstellung der Unterschiede specieller Fälle von Functionen verweisen wir auf unsern Differenzial- und Differenzen-Calcul, 6te Abhandlung.

§. 68.

Eine andere Darstellung der Unterschiede der zusammengesetzten Functionen gewinnen wir durch die Aufstufungen der einfachen. Gehen wir von der Gleichung

$$\Delta(XY) = X_1 Y_1 - X_0 Y_0$$

aus, und zählen $X_0 Y_1$ zu und ab, so wird der Werth der Gleichung nicht geändert, und wir erhalten

$$\Delta(XY) = X_1 Y_1 + X_0 Y_1 - X_0 Y_1 - X_0 Y_0 = (X_1 + X_0) Y_1 - X_1 (Y_1 + Y_0).$$

Da nun $X_1 + X_0 = \zeta X_0$ und $Y_1 + Y_0 = \zeta Y_0$ ist, so entsteht

$$\Delta(XY) = \zeta X_0 . Y_1 - X_0 \zeta Y_1,$$

oder, wenn die Functionen ausgeschieden werden,

$$318.\qquad \Delta(XY) = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y) XY.$$

Vervielfacht man mit Δ, so entsteht

$$\Delta^2 XY = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y) \Delta(XY) = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)(\zeta_x \Theta_y - \zeta_y) XY.$$

und hieraus, durch Vereinigung,

$$\Delta^2 XY = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^2 XY.$$

Eben so erhält man für den dritten Unterschied

$$\Delta^3 XY = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^3 XY,$$

und hieraus allgemein

$$319.\qquad \Delta^m XY = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^m XY.$$

Die entwickelte Darstellung dieser Gleichung ist

$$320.\qquad \Delta^m XY = \zeta^m X . Y_m - \frac{m}{1} \zeta^{m-1} X . \zeta Y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \zeta^{m-2} X \zeta Y_{m-2} - \ldots.$$

Diese Darstellungsweise hat das Eigenthümliche, dafs sie nur von Functionen gilt, die aus einer geraden Anzahl von Factoren bestehen. Ist da-

her r eine gerade Zahl, so hat man

$$321. \quad \Delta^m X_1 X_2 \ldots X_r = (\zeta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r - \zeta_2 \Theta_3 \Theta_4 \ldots \Theta_r + \ldots (-)^{r-1} \zeta_r)^m X_1 X_2 \ldots X_r.$$

Ist r aber eine ungerade Zahl, so gilt folgende Gleichung:

$$322. \quad \Delta^m X_1 X_2 \ldots X_r = (\zeta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r - \zeta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r \ldots - \zeta_{r-1} \Theta_r + \Delta_r)^m X_1 X_2 X_4 \ldots X_r.$$

Auffallend ist die Übereinstimmung, welche zwischen den Gleichungen dieses §. und denen des §. 59. herrscht.

Alle diese Darstellungen gelten auch von den negativen Unterschieden. Wird nemlich (318.) mit Δ^{-1} vervielfacht, so entsteht

$$XY = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y) \Delta^{-1} XY,$$

also

$$\Delta^{-1}(XY) = \frac{XY}{\zeta_x \Theta_y - \zeta_y} = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^{-1} XY.$$

und hieraus

$$\Delta^{-m} XY = \frac{XY}{(\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^m} = (\zeta_x \Theta_y - \zeta_y)^{-m} XY.$$

Die entwickelte Gleichung für diese Darstellung ist

$$323. \quad \Delta^{-m} XY = \zeta^{-m} X_0 . Y_{-m} + \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} X_0 . \zeta Y_{-m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \zeta^{-m-2} X_0 . \zeta^2 Y_{-m-2} + \ldots$$

Aus (321.) gewinnen wir folgende Darstellung für eine gerade Factoren-Anzahl:

$$324. \quad \Delta^{-m} X_1 X_2 \ldots X_r = (\zeta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r - \zeta_2 \Theta_3 \Theta_4 \ldots \Theta_r \ldots (-)^{r-1} \zeta_n)^{-m} X_1 X_2 \ldots X_r.$$

Aus (322.) aber, für eine ungerade Factoren-Anzahl, folgende:

$$325. \quad \Delta^{-m} X_1 X_2 \ldots X_r = (\zeta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r - \zeta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_r + \ldots - \zeta_{r-1} \Theta_r + \Delta_r)^{-m} X_1 X_2 \ldots X_r.$$

Die Gleichung (323.) erzeugt folgende specielle Fälle:

$$326. \quad \begin{cases} \Delta^{-1} XY = \zeta^{-1} X . Y_{-1} + \zeta^{-2} X . \zeta Y_{-2} + \zeta^{-3} X . \zeta^2 Y_{-3} + \ldots \\ \Delta^{-2} XY = \zeta^{-2} X . Y_{-2} + 2\zeta^{-3} X . \zeta Y_{-3} + 3\zeta^{-4} X . \zeta^2 Y_{-4} + \ldots \\ \Delta^{-3} XY = \zeta^{-3} X . Y_{-3} + 3\zeta^{-3} X . \zeta Y_{-4} + 6\zeta^{-5} X . \zeta^2 Y_{-5} + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Erhöhen wir hierin die Stellenzahlen um p, so ist

$$327. \quad \begin{cases} \Delta^{-1} X_p Y_p = \zeta^{-1} X_p . Y_{p-1} + \zeta^{-2} X_p . \zeta Y_{p-2} + \zeta^{-3} X_p . \zeta Y_{p-3} + \ldots \\ \Delta^{-2} X_p Y_p = \zeta^{-2} X_p . Y_{p-2} + 2\zeta^{-3} X_p . \zeta Y_{p-3} + 3\zeta^{-4} X_p . \zeta^2 Y_{p-4} + \ldots \\ \Delta^{-3} X_p Y_p = \zeta^{-3} X_p . Y_{p-3} + 3\zeta^{-4} X_p . \zeta Y_{p-4} + 6\zeta^{-5} X_p . \zeta^2 Y_{p-5} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

u. s. w.

II. Darstellung der Unterschiede zusammengesetzter Functionen, mit Hülfe der Differenziale.

§. 69.

Um die Unterschiede der zusammengesetzten Functionen durch Differenziale zu gewinnen, gehen wir, wie früher, von der bekannten Taylorschen Reihe aus. Nach ihr ist nämlich

$$X_1 = f(X+\Delta x) = X+\Delta X = \left[1+\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2}{1.2.(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3}{1.2.3.(\partial x^3)}+\ldots.\right]X$$
$$= e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}X.$$

Wird hierin die Function Y statt X gesetzt, so wird an dem Gesetze, welches dieser Darstellung unterliegt, nichts, sondern nur an der Form geändert, und es ist

$$Y_1 = Y+\Delta Y = e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial x}}Y.$$

Eben so

$$Z_1 = Z+\Delta Z = e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial x}}Z,$$

u. s. w. Nach diesen Vorbereitungen wird es nun leicht sein, die Darstellung der Unterschiede der zusammengesetzten Functionen durch Differenziale zu geben. Es ist nämlich nach der Grundgleichung (133.) des Unterschiednehmens:

$$\Delta(XY) = X_1 Y_1 - X_0 Y_0.$$

Werden nun hierin die vorstehenden Werthe eingeführt, so erhalten wir:

$$228.\quad \Delta(XY) = e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}X.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}Y - XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)XY.$$

Wird diese Gleichung mit Δ vervielfacht, so erhalten wir

$$\Delta^2 XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)\Delta(XY) = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)XY$$
$$= \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)^2 XY.$$

Eben so

$$\Delta^3 XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)^3 XY$$

u. s. w., und hieraus allgemein

$$329.\quad \Delta^m XY = \left(e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial x}}.e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}}-1\right)^m XY.$$

Auf dieselbe Weise, wie der Unterschied einer zweitheiligen Function durch Differenziale dargestellt wurde, wird auch der einer dreitheiligen gewonnen. Es ist

$$\Delta(XYZ) = X_1 Y_1 Z_1 - X_0 Y_0 Z_0,$$

oder, wenn die Differenziale eingeführt und die Functionen ausgeschieden werden,

$$\Delta(XYZ) = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} . e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}} - 1\right) XYZ.$$

Der nämliche Gang, der zum $m$ten Unterschiede einer zweitheiligen Function führte, führt zum $m$ten einer dreitheiligen und es wird:

$$330. \qquad \Delta^m(XYZ) = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial y}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} . e^{\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}} - 1\right)^m XYZ.$$

Eben so für den $m$ten Unterschied einer Function, die aus jeder beliebigen Anzahl Factoren besteht:

$$331. \qquad \Delta^m(XYZ....) = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} + \frac{\Delta y.\partial}{\partial y} + \frac{\Delta z.\partial}{\partial z} + ... - 1\right)^m X.Y.Z....$$

§. 70.

Die im vorigen §. gewonnenen Darstellungen sind allgemein und gelten nicht nur für positive, sondern auch für negative Unterschiede, wie aus folgendem hervorgeht. Vervielfachen wir (328.) mit Δ^{-1}, so wird, da $\Delta^{-1}\Delta' XY = XY$ ist,

$$XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} + \frac{\partial y.\partial}{\partial y} - 1\right) \Delta^{-1} XY,$$

und hieraus:

$$332. \qquad \Delta^{-1} XY = \frac{XY}{e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1} = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-1} XY.$$

Wird diese Gleichung mit Δ^{-1} vervielfacht, so entsteht

$$\Delta^{-2} XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-1} \Delta^{-1} XY$$

$$= \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-1} \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-1} XY,$$

und hieraus durch Zusammenziehen:

$$\Delta^{-2} XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-2} XY.$$

Dieser Gang führt zu folgender Darstellung:

$$333. \qquad \Delta^{-m} XY = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} . e^{\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}} - 1\right)^{-m} XY.$$

Eben so zu folgender:

$$\Delta^{-m} XYZ = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}+\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}+\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}}-1\right)^{-m} XYZ$$

und

334. $$\Delta^{-m} XYZ.... = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}+\frac{\Delta y.\partial}{\partial y}+\frac{\Delta z.\partial}{\partial z}+....}-1\right) XYZ....$$

§. 71.

Die in den beiden vorhergehenden §§. gefundenen Gleichungen sind nur formell. Um eine entwickelte Darstellung, und zwar für negative Unterschiede, zu erhalten, gehen wir von folgender, aus (313.) entnommenen allgemeinen Gleichung aus:

$$\Delta^{-m} X_p Y_p = X_p \Delta^{-m} Y_p - \frac{m}{1}\Delta X_p . \Delta^{-m-1} Y_{p+1} + \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^2 X_p . \Delta^{-m-2} Y_{p+2} - - ....$$

beschränken uns jedoch auf eine aus zwei Factoren bestehende Function, behalten die negativen Unterschiede bei, und führen nur die Darstellung der Unterschiede der Differenziale ein. Zu dem Ende benutzen wir die schon §. 63. angegebene Gleichung von folgender Form:

$$\Delta^m X_p = 1.2....m\, C_1^m \frac{(\Delta x)^m.\partial^m X_p}{1.2....m(\partial x)^m} + 1.2....m\, C_2^m \frac{(\Delta x)^{m+1}\partial^{m+1} X_p}{1.2....(m+1)(\partial x)^{m+1}} + ...$$

Werden hiernach die Ausdrücke ΔX_p, $\Delta^2 X_p$, $\Delta^3 X_p$ .... entwickelt und dann eingeführt, so gewinnen wir

335. $$\Delta^{-m}(X_p Y_p)$$

$$= X_p \Delta^{-m} Y_p$$

$$- \frac{m}{1}\Delta^{-m-1} Y_{p+1}\left[\frac{\Delta x.\partial X_p}{\partial z} + \frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3} + ...\right]$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^{-m-2} Y_{p+2}\left[1.2.\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2} + 1.2.C_2^2\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3} + 1.2.C_3^2\frac{(\Delta x)^4.\partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4} + ...\right]$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\Delta^{-m-3} Y_{p+3}\left[1.2.3.\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3} + 1.2.3.C_1^3\frac{(\Delta x)^4.\partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}\right.$$

$$\left. + 1.2.3.C_2^3\frac{(\Delta x)^5.\partial^5 X_p}{1.2....5(\partial x)^5} + ...\right].$$

Diese Darstellung kann auch nach den Differenzialen geordnet werden. Die veränderte Anordnung führt zu folgender Darstellung:

336. $\Delta^{-m}(X_p Y_p)$

$$= X_p \Delta^{-m} Y_p - \frac{\Delta x.\partial X_p}{1.2.\partial x}.\frac{m}{1} \Delta^{-m-1} Y_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2}\left[-C_2^1 \frac{m}{1} \Delta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2.C_1^2 \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta^{-m-2} Y_{p+2}\right]$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3}\left[-C_3^1 \frac{m}{1} \Delta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2.C_2^2 \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta^{-m-2} Y_{p+2}\right.$$
$$\left. + 1.2.3.C_1^3 \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \Delta^{-m-3} Y_{p+3}\right]$$
. . . . . .

Man erkennt leicht, dafs die Gleichungen (334.) und (335.) mit den Gleichungen (298.) und (299.) übereinstimmen, wenn Aufstufungen für Unterschiede gesetzt werden.

Aus (335.) gewinnen wir folgende specielle Fälle, wenn $m = 1$ gesetzt wird:

337. $\Delta^{-1} X_p Y_p$

$$= X_p \Delta^{-1} Y_p - \frac{\Delta x.\partial X_p}{1.\partial x} \Delta^{-2} X_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_p}{1.2.(\partial x)^2}(-\Delta^{-2} Y_{p+1} + 2\Delta^{-3} Y_{p+2})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3}(-\Delta^{-2} Y_{p+1} + 6\Delta^{-3} Y_{p+2} - 6\Delta^{-4} Y_{p+3})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}(-\Delta^{-2} Y_{p+1} + 14\Delta^{-3} Y_{p+2} - 36\Delta^{-4} Y_{p+3} + 24\Delta^{-5} Y_{p+4})$$
. . . . . .

wenn $m = 2$ gesetzt wird:

338. $\Delta^{-2} X_p Y_p$

$$= X_p \Delta^2 Y_p - 2\frac{\Delta x.\partial X_p}{1.\partial x}\Delta^{-3} Y_{p+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2.\partial^3 X_p}{1.2.(\partial x)^2}(-2\Delta^{-3} Y_{p+1} + 6\Delta^{-4} Y_{p+2})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_p}{1.2.3.(\partial x)^3}(-2\Delta^{-3} Y_{p+1} + 18\Delta^{-4} Y_{p+2} - 24\Delta^{-5} Y_{p+3})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4.\partial^4 X_p}{1.2.3.4.(\partial x)^4}(-2\Delta^{-3} Y_{p+1} + \Delta 2\Delta^{-4} Y_{p+2} - 144\Delta^{-5} Y_{p+3} + 120\Delta^{-6} Y_{p+4})$$

§. 71.

Die Darstellung der Abstufungen, da sie nichts anderes als verneinte Darstellung der Unterschiede ist, und also nichts Neues bietet, übergehen wir.

Wir theilen endlich noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang der Aufstufungen und Unterschiede mit. Es ist nämlich

$$X_1 = X + \Delta X = (1+\Delta) X = \Theta X.$$

Wird hierzu X_0 gezählt, so erhalten wir die erste Aufstufung der Function X; daher ist

$$339. \qquad \zeta X_0 = (1+\Theta) X = (2+\Delta) X.$$

Wird durch X gemessen, so folgern sich hieraus die Gleichungen

$$340. \qquad \begin{cases} \zeta = 1+\Theta, \\ \zeta = 2+\Delta, \end{cases}$$

also auch

$$\Theta = \zeta - 1,$$
$$\Delta = \zeta - 2.$$

Dies führt zu folgenden Darstellungen:

$$341. \qquad \zeta^m X = (1+\Theta)^m X = (2+\Delta)^m X$$
$$= 2^m X + \frac{m}{1} 2^{m-1} \Delta X + \frac{m(m-1)}{1.2} 2^{m-2} \Delta^2 X + \ldots + \Delta^m X,$$

$$342. \qquad \zeta^{-m} X = (1+\Theta)^m X = (2+\Delta)^{-m} X$$
$$= \frac{X}{2^m} - \frac{m}{1} \cdot \frac{\Delta X}{2^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 X}{2^{m+2}} - \ldots$$

$$343. \qquad \Delta^m X_0 = (\zeta - 2)^m X_0 = \zeta^m X - \frac{m}{1} 2\zeta^{m-1} X + \frac{m(m-1)}{1.2} 2^2 \zeta^{m-2} X - \ldots$$

$$344. \qquad \Delta^{-m} X_0 = (\zeta - 2)^{-m} X_0 = \zeta^{-m} X + \frac{m}{1} 2\zeta^{-m-1} X + \ldots.$$

Diese Gleichungen gelten nicht nur von einfachen, sondern auch von zusammengesetzten Functionen, und zeigen, wie die Aufstufungen durch Unterschiede und umgekehrt vorgestellt werden können.

25.

Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

I.

Resolutio aequationum algebraica poscit, ut, dato numero elementorum, singula elementa per functiones eorum symmetricas ope extractionis radicum exhibeantur. Quod pro secundi, tertii, quarti gradus aequationibus succedere notum est. Functionum illarum symmetricarum natura cum in libris certe elementaribus indicari non soleat, rapide eam exponam.

Resolutio aequationum secundi gradus.

Propositis duobus elementis a, b, habentur singula per formulam

$$\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]}.$$

Resolutio aequationum tertii gradus.

Propositis tribus elementis a, b, c, statuamus

$$a+b+c=u, \qquad a+\alpha b+\alpha^2 c=u', \qquad a+\alpha^2 b+\alpha c=u'',$$

designantibus α, α^2 radices cubicas imaginarias unitatis. Quibus positis, singula elementa ope ipsarum u, u', u'' exhibentur per formulas

$$a=\frac{u+u'+u''}{3}, \qquad b=\frac{u+\alpha^2 u'+\alpha u''}{3}, \qquad c=\frac{u+\alpha u'+\alpha^2 u''}{3}.$$

Statuamus porro

$$u'=\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}, \qquad u''=\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})},$$

erit

$$v=\frac{u'^3+u''^3}{2}=\frac{(u'+u'')(u'+\alpha u'')(u'+\alpha^2 u'')}{2},$$

$$\sqrt{w}=\frac{u'^3-u''^3}{2}=\frac{(u'-u'')(u'-\alpha u'')(u'-\alpha^2 u'')}{2}.$$

Substitutis autem ipsarum u', u'' valoribus supra appositis, cum sit $1+\alpha+\alpha^2=0$, habetur

$$u'+u''=2a-b-c, \qquad u'+\alpha u''=\alpha^2(2c-a-b),$$

$$u'+\alpha^2 u''=\alpha(2b-c-a),$$

ideoque

$$v=\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}.$$

Porro fit:

$$u' - u'' = (\alpha - \alpha^2)(b - c),$$
$$u' - \alpha u'' = (1 - \alpha)(a - b),$$
$$u' - \alpha^2 u'' = (1 - \alpha^2)(a - c),$$

ideoque cum sit

$$1 - \alpha = \alpha^2(\alpha - \alpha^2), \qquad 1 - \alpha^2 = -\alpha(\alpha - \alpha^2), \qquad \alpha - \alpha^2 = \sqrt{-3},$$

fit

$$\sqrt{w} = \frac{3\sqrt{-3}}{2}(a - b)(a - c)(b - c).$$

His valoribus substitutis, prodit

$$a = \frac{a+b+c}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) + 3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) - 3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)},$$

$$b = \frac{a+b+c}{3} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) + 3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)}$$
$$+ \frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) - 3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)},$$

$$c = \frac{a+b+c}{3} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) + 3\sqrt{-3}[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}{2}\right)}$$
$$+ \frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b) - 3\sqrt{-3}[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}{2}\right)};$$

quae sunt expressiones quaesitae.

Radicalia cubica

$$u' = \sqrt[3]{(v + \sqrt{w})}, \qquad u'' = \sqrt[3]{(v - \sqrt{w})}$$

alterum per alterum exhibentur ope formulae

$$u'u'' = \sqrt[3]{(vv - w)} = aa + bb + cc - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2}$$
$$= \sqrt[3]{\left[\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}[(a-b)(a-c)(b-c)]^2.\right]}$$

Resolutio aequationum quarti gradus.

Propositis quatuor elementis a, b, c, d, **statuamus**

$$a + b + c + d = u, \qquad a + b - c - d = u',$$
$$a - b + c - d = u'', \qquad a - b - c + d = u''',$$

unde

$$a = \frac{u+u'+u''+u'''}{4}, \qquad b = \frac{u+u'-u''-u'''}{4},$$
$$c = \frac{u-u'+u''-u'''}{4}, \qquad d = \frac{u-u'-u''+u'''}{4}.$$

Statuamus in formulis, quas de resolutione aequationum tertii gradus proposuimus, loco a, b, c quantitates $u'u'$, $u''u''$, $u'''u'''$, unde fit

$$2v = (2u'u'-u''u''-u'''u''')(2u''u''-u'''u'''-u'u')(2u'''u'''-u'u'-u''u''),$$
$$2\sqrt{w} = 3\sqrt{-3}(u'u'-u''u'')(u'u'-u'''u''')(u''u''-u'''u''').$$

Habetur autem

$$u'u'-u''u'' = (u'+u'')(u'-u'') = 4(a-d)(b-c),$$
$$u'u'-u'''u''' = (u'+u''')(u'-u''') = 4(a-c)(b-d),$$
$$u''u''-u'''u''' = (u''+u''')(u''-u''') = 4(a-b)(c-d);$$

porro fit

$$2u'u'-u''u''-u'''u''' = 8(ab+cd)-4(ac+bd)-4(ad+bc),$$
$$2u''u''-u'''u'''-u'u' = 8(ac+bd)-4(ad+bc)-4(ab+cd),$$
$$2u'''u'''-u'u'-u''u'' = 8(ad+bc)-4(ab+cd)-4(ac+bd).$$

Statuamus insuper

$$s = u'u'+u''u''+u'''u'''.$$

Quibus omnibus collectis, atque formulis de resolutione aequationum tertii gradus antecedentibus traditis in auxilium vocatis, invenitur, rurus posito

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$4a = u + \sqrt{\left(\frac{s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4b = u + \sqrt{\left(\frac{s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} - \sqrt{\left(\frac{s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$- \sqrt{\left(\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4c = u - \sqrt{\left(\frac{s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$- \sqrt{\left(\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4d = u - \sqrt{\left(\frac{s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} - \sqrt{\left(\frac{s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

ubi habetur:

$$u = a+b+c+d,$$
$$s = (a+b-c-d)^2+(a-b+c+d)^2+(a-b-c-d)^2$$
$$= (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2,$$
$$v = 32\,[2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc)]$$
$$[2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd)]$$
$$[2(ad+bc)-(ac+bd)-(ad+bc)],$$
$$w = -3\,[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2.$$

Quae expressiones cum omnes sint ipsorum a, b, c, d functiones symmetricae, proposito satisfactum est.

Observo porro, haberi in antecedentibus:

$$\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}.\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})} = \sqrt[3]{(vv-w)}$$
$$= u'^4+u''^4+u'''^4-u'^2u''^2-u'^2u'''^2-u''^2u'''^2$$
$$= 8[(a-b)^2(c-d)^2+(a-c)^2(b-d)^2+(a-d)^2(b-c)^2];$$

porro

$$\sqrt{[s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}.\sqrt{[s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}.\sqrt{[s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}$$
$$= \sqrt{[s^3+2v-3s\sqrt[3]{(vv-w)}]} = uu'u'' = (a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

Quae expressiones cum respectu elementorum a, b, c, d sint symmetricae, videmus, e duobus radicalibus cubicis alterum per alterum dari, e tribus radicalibus quadraticis, quae per u', u'', u''' designavimus, unum per duo reliqua determinari. Cuius observationis beneficio fit, ut per tantam radicalium ambiguitatem non maior quam quatuor quantitatum diversarum numerus repraesentetur.

II.

Considerationes generales.

Si accuratius examinamus, quomodo antecedentibus compositae sint expressiones, quibus quatuor elementa repraesentantur, videmus, primum e functione symmetrica elementorum extrahi radicem quadraticam, qua iuncta alteri functioni symmetricae, extrahi radicem cubicam; hanc alteri simili radici cubicae iungi et tertiae functioni symmetricae, quo facto rursus extrahi radicem quadraticam, et tribus eiusmodi radicibus quadraticis simili modo formatis atque nova functione symmetrica omnia quatuor elementa exhiberi. Quae radicum extractiones non nisi indicari possunt, si quantitates sub radicalibus exprimuntur per coëfficientes aequationis

quarti gradus, cuius elementa illa radices sunt; si vero quantitates sub radicalibus per ipsa elementa, uti fecimus, exhibentur, videmus, ipsas extractiones praestari posse omnes, iisque varias determinari functiones insymmetricas elementorum, donec ad ipsa tandem singula elementa perveniatur.

Initium videmus in his quaestionibus faciendum esse ab investiganda functione insymmetrica, cuius certa potestas symmetrica fiat. Neque enim aliter per solas radicum extractiones a functionibus symmetricis ad insymmetricas pervenire licet. Eiusmodi autem nulla alia datur functio nisi productum e differentiis elementorum conflatum, quod permutatis elementis duos valores sibi oppositos induere potest, et cuius quadratum functio symmetrica est. Quod igitur quadratum in omnibus solutionibus, antecedentibus traditis, sub ultimo radicali inveniri debet et invenitur, neque igitur radicale ultimum aliud esse potest nisi quadraticum. Idem etiam consideratione sequente patet.

Statuamus enim, coëfficientes aequationis esse functiones quantitatis alicuius t, atque radicem x vocemus; aequationem hanc in modum proponere licet:

$$F(x, t) = 0.$$

Unde differentiale radicis secundum t sumtum, adhibita Lagrangiana notatione, invenimus,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{F'(t)}{F'(x)}.$$

Hinc sequitur, si aequatio proposita duas habeat radices inter se aequales, easque pro x eligamus, abire $\frac{\partial x}{\partial t}$ in infinitum. Nam pro valore illa denominator $F'(x)$ evanescit. Si igitur x per t ope radicalium exhiberi potest, expressio ita comparata esse debet, ut differentiatione denominatorem nanciscatur, qui evanescit, quoties duae radices inter se aequales fiunt, qui igitur alius esse non potest, nisi quadratum illud producti e differentiis omnium radicum aequationis conflati. Quod igitur quadratum in expressionibus illis sub radicali inveniri debet neque aliis quantitatibus additione iunctum, sive sub ultimo radicali, sicuti etiam in resolutionibus algebraicis aequationum secundi, tertii, quarti gradus vidimus.

Saepius observatum est, si datur resolutio algebraica generalis aequationis n^{ti} gradus, inter cuius radices certae relationes locum non habent, expressionem radicis tot radicalia necessario implicare, ut etiam inferiorum

graduum aequationum solutiones algebraicas continere possit. Unde facile coniicis, numerum dimensionum, ad quam expressio sub ultimo radicali ascendit, minorem esse non posse, quam numerum minimum, qui per omnes numeros 2, 3, 4, ..., n dividatur. Qui pro $n=2, 3, 4,$ fit 2, 6, 12. Et idem casibus illis est numerus dimensionum quadrati producti illius e differentiis radicum aequationis conflati, quod sub ultimo radicali inveniebatur. Sed pro $n=5$ fit minimus ille numerus, qui per 2, 3, 4, 5 dividatur, $=60$, dum numerus dimensionum quadrati illius tantum ad 20 sive generaliter ad numerum $n(n-1)$ ascendit. Nec non pro altioribus ipsius n valoribus consensus ille plane deficit.

Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt.

Sint elementa quinque proposita x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ac designemus per symbolum

$$(12345),$$

functionem elementorum rationalem, quae et immutata manet, si elementa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 eodem ordine, quo ea exhibemus, commutamus respective cum his

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1,$$

et cum his

$$x_5,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Statuamus porro

$$(12345)-(13524) = y;$$

demonstravit olim ill. *Lagrange*, expressionem y^2 permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 non plures quam sex valores diversos induere posse, ita ut, data aequatione quinti gradus, cuius radices sint x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, expressio y^2 sit radix datae aequationis sexti gradus. Statuamus

$$\begin{aligned}
(12345)-(13524) &= y_1\\
(12453)-(14325) &= y_2\\
(12534)-(15423) &= y_3\\
(15243)-(12354) &= y_4\\
(14235)-(12543) &= y_5\\
(13254)-(12435) &= y_6,
\end{aligned}$$

erunt y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_5^2, y_6^2 radices aequationes illius sexti gradus. Sed credo, nondum observatum esse, ipsas quoque y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 esse radices datae aequationis sexti gradus, quamquam coëfficientes eius

non omnes sint functiones symmetricae elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, neque igitur per coëfficientes datae aequationis quinti gradus rationaliter exhiberi possint. Examinando enim mutationes, quas expressiones y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 subeant, invenimus omnes simul aut alias in alias abire, aut in valores oppositos. Unde ipsorum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 functio symmetrica homogenea, si paris ordinis est, etiam respectu ipsorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrica erit; si vero imparis ordinis est, permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 alias non subire potest mutationes, nisi quod signum mutet. Quod locum habere generaliter invenimus, si bina elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 permutamus. Facile autem patet, eiusmodi functionem elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, quae binis permutatis signum mutet neque aliam mutationem subeat, aliam esse non posse, nisi productum ex omnibus differentiis elementorum, multiplicatum per functionem eorum symmetricam. Cuius producti quadratum cum functio symmetrica sit ideoque pro noto habeatur, videmus, functiones symmetricas ipsorum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 omnes et ipsas pro datis haberi posse. Videlicet si aequatio sexti gradus, cuius radices sint y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, statuatur

$$y^6 - a_1 y^5 + a_2 y^4 - a_3 y^3 + a_4 y^2 - a_5 y + a_6 = 0,$$

coëfficientes a_2, a_4, a_6 rationaliter exhiberi possunt per coëfficientes datae aequationis quinti gradus, coefficientes autem a_1, a_3, a_5 erunt expressiones rationales coëfficientium aequationis quinti gradus, multiplicatae per radicem quadraticam $\sqrt{\Delta}$, siquidem

$$\Delta = [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)]^2.$$

Functio simplicissima, quae proprietatibus expressionis symbolicae (12345) supra assignatis gaudet, est haec:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1,$$

pro qua aequationis sexti gradus radices habentur,

$$y_1 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - x_1x_3 - x_3x_5 - x_5x_2 - x_2x_4 - x_4x_1$$
$$y_2 = x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_5 + x_5x_3 + x_3x_1 - x_1x_4 - x_4x_3 - x_3x_2 - x_2x_5 - x_5x_1$$
$$y_3 = x_1x_2 + x_2x_5 + x_5x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 - x_1x_5 - x_5x_4 - x_4x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$$
$$y_4 = x_1x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_3 + x_3x_1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_5 - x_5x_4 - x_4x_1$$
$$y_5 = x_1x_4 + x_4x_2 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_5x_1 - x_1x_2 - x_2x_5 - x_5x - x_4x_3 - x_3x_1$$
$$y_6 = x_1x_3 + x_3x_2 + x_2x_5 + x_5x_4 + x_4x_1 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_4x_3 - x_3x_5 - x_5x_1.$$

Quae expressiones cum respectu elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tantum ad secundam dimensionem ascendunt, coëfficientes a_1, a_5, a_5 erunt secun-

dae, sextae, decimae dimensionis. Quarum expressiones cum ex observatione antea facta productum ex omnibus differentiis elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tamquam factorem contineant, quod ad decimam dimensionem ascendit, fieri debet

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_6 = m\sqrt{\Delta},$$

designante m numerum. Et calculo facto invenitur

$$a_5 = 32(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5),$$

ideoque $m = 32$. Unde aequatio sexti gradus formam induit:

$$y^6 + a_2 y^4 + a_4 y^2 + a_6 = 32\sqrt{\Delta}.y.$$

Si aequatio quinti gradus proposita est:

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0,$$

facile invenitur

$$a_2 = 6B^2 - 16AC + 40D.$$

Valores ipsorum a_4, a_6 paullo ampliores calculos poscunt. Valorem ipsius Δ, per A, B, C, D, E, expressum, tradidit ill. *Lagrange* in theoria aequationum, e *Meditationibus Algebraicis* celeberrimi *Waring* descriptum.

III.

Ludicrum de resolutione algebraica aequationum quinti gradus.

Olim, ut fit, cum puer studiosus in tentanda resolutione algebraica aequationum quinti gradus desudarem, aequationem generalem

$$x^5 - 10q^2x = p$$

ad aliam decimi gradus revocavi, cuius resolutio algebraica contigit, duorum tantum coëfficientium signis mutatis. Rem inutilem, sed curiosam, paucis referam.

Posito $x = y + z$, cum sit

$$x^5 - 10y^2z^2.x = y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z^3),$$

hanc aequationem cum proposita comparavi, unde

$$yz = q, \quad y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z) = p,$$

ideoque

$$y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = p.y^5.$$

Qua aequatione decimi gradus resoluta, etiam proposita quinti gradus resoluta est.

Facile mihi credis, illam quidem aequationem decimi gradus algebraice resolvi non posse, sed huius alius:

$$y^{10} - 5qy^8 - 5q^4y^2 + q^5 = p.y^5,$$

quae duorum tantum coëfficientium signis ab illa discrepat, hanc inveni radicem algebraicam:

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{p+\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{p-\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)}$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt[5]{\left(\left(\frac{p+\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)^2\right)} + \sqrt[5]{\left(\left(\frac{p-\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)^2\right)}\right]} = y.$$

IV.

De numero radicum realium, quae inter datos limites continentur.

Cartesius olim regulam dedit, qua, data aequatione algebraica, e signis coëfficientium eius limites cognoscuntur, quos numerus radicum positivarum et numerus radicum negativarum suparare non potest. Eiusmodi limites assignavit Cl. *Fourier* pro radicibus realibus, quae inter datas quantitates reales quaslibet a et b continentur. Sed idem observo e regula *Cartesiana* peti potuisse. Sit enim x radix aequationis propositae, statuatur

$$y = \frac{b-x}{x-a},$$

erit y radix aequationis eiusdem ordinis, quae tot habet radices positivas, quot valores ipsius x inter a et b positae sunt. Unde regula *Cartesiana* adhibita ad aequationem transformatam, notus erit limes numeri radicum aequationis propositae, quae inter a et b continentur. Res adeo hic per signa unius seriei $n+1$ quantitatum transigitur, si n gradus aequationis, dum Cl. *Fourier* eiusmodi series duas adhibet. Sed regula a viro illustri prodita et multis aliis nominibus et calculo expedito praestat.

Eadem observatione regula celeberrima *Sturmiana*, qua numerus accuratus definitur radicum, quae inter datos limites continentur, ad casum eum revocari potest, quo numerus radicum aut positivarum aut negativarum quaeritur.

V.

Quomodo regula Bernouilliana ad investigandas radices, quae maximam aut minimam sequuntur, extendi potest.

Sit X ipsius x data functio quaelibet rationalis integra n^{ti} ordinis, sit P functio eius alia quaelibet rationalis integra minoris ordinis; evolvatur fractio $\frac{P}{X}$ ad descendentes potestates ipsius x, cuius evolutionis termini se excipientes sint

$$\frac{p_{m-1}}{x^m} + \frac{p_m}{x^{m+1}},$$

docuit olim *Daniel Bernouilli*, quotientem $\frac{p_m}{p_{m-1}}$ convergere ad valorem radicis absolute maximae aequationis

$$X = 0.$$

Si fractio $\frac{P}{X}$ ad potestates ascendentes ipsius x evolvitur, cuius evolutionis termini duo se excipientes sint

$$q_m x^m + q_{m+1} x^{m+1},$$

quoties $\frac{q_m}{q_{m+1}}$ ad valorem radicis absolute minimae converget. Causa regulae nota haec est, quod in expressione generali ipsius p_m,

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + C_3 x_3^m \ldots + C_n x_n^m,$$

in qua $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt radices aequationis propositae, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes seu quantitates ab exponente m non pendentes, prae uno termino in m^{tam} potestatem radicis maximae ducto negligi possint reliqui omnes, siquidem numerus m satis magnus statuitur. Simile de radice minima investiganda valet.

Statuamus radices, secundum magnitudinem *absolutam* dispositas, esse

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

ita ut x_1 sit maxima, x_n minima. Radices imaginarias secundum earum modulum aestimamus, sive si radix imaginaria $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$, designantibus r, φ quantitates reales, secundum quantitatem r. Regula de investiganda radice maxima proposita deficit, si duae radices maximae inter se aequales adsunt, vel quoties radices duae maximae imaginariae sunt, si utrique idem modules est. Eo casu regula antecedens ita amplificanda est, ut simul duae radices maximae investigentur. Quod ipse iam *Eulerus* fecit pro casu, quo duae radices maximae sunt imaginariae formae $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$, $r(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)$, in Cap. XVII. Vol. I. *In-*

troductionis. Paucis demonstrabo sequentibus, quomodo iisdem principiis indagetur aequatio k^{ti} ordinis, cuius k radices totidem radicibus maximis aequationis propositae proxime aequales sunt. Quam amplificationem Cl. *Fourier* in introductione operis de aequationibus indicavit.

In expressione generali ipsius p_m prae terminis ductis in k radices maximas, ad m^{tam} dignitatem elatas, negligimus reliquos terminos omnes; quod eo maiore iure licet, quo maior numerus m. Hinc statuimus proxime:

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m \ldots + C_k x_k^m,$$

seu posito

$$C_1 x_1^m = B_1, \quad C_2 x_2^m = B_2, \ldots, C_k x_k^m x_k^m = B_k,$$

statuimus proxime:

$$\begin{aligned}
p_m &= B_1 + B_2 \ldots + B_k \\
p_{p+1} &= B_1 x_1 + B_2 x_2 \ldots + B_k x_k \\
p_{m+2} &= B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 \ldots + B_k x_k^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_{m+k} &= B_1 x_1^k + B_2 x_2^k \ldots + B_k x_k^k.
\end{aligned}$$

Ponamus

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k) = x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} \ldots + A_k,$$

quam expressionem evanescere patet, si loco x ponuntur k valores x_1, x_2, ..., x_k. Unde ex aequationibus antecedentibus sequitur haec:

$$0 = p_{m+k} + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} \ldots + A_k p_m.$$

In qua, si loco m ponimus $m+1$, $m+2$, etc., habemus sequens aequationum systema:

$$\begin{aligned}
0 &= x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} \ldots + A_k \\
0 &= p_{m+k} + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} \ldots + A_k p_m \\
0 &= p_{m+k+1} + A_1 p_{m+k} + A_2 p_{m+k-1} \ldots + A_k p_{m+1} \\
0 &= p_{m+k+2} + A_1 p_{m+k+1} + A_2 p_{m+k} \ldots + A_k p_{m+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= p_{m+2k-1} + A_1 p_{m+2k-2} + A_2 p_{m+2k-3} \ldots + A_k p_{m+k-1},
\end{aligned}$$

De quibus aequationibus, quarum numerus $k+1$, eliminatis k quantitatibus A_1, A_2, ..., A_k, prodit aequatio huiusmodi:

$$P x^k + P_1 x^{k-1} + P_2 x^{k-2} \ldots + P_k = 0,$$

in qua P, P_1, P_2, ..., P_k per terminos p_m, p_{m+1}, ..., p_{m+2k-1} expressae sunt, et cuius radices aequationis propositae $X=0$, k radicibus maximis proxime aequales sunt.

Sit $k = 2$, habetur

$$0 = x^2 + A_1 x + A_2,$$
$$0 = p_{m+2} + A_1 p_{m+1} + A_2 p_m$$
$$0 = p_{m+3} + A_1 p_{m+2} + A_2 p_{m+1},$$

unde eliminatis A_1, A_2, habentur x_1, x_2 proxime aequales radicibus aequationis quadraticae:

$$(p_{m+1}^2 - p_m p_{m+2}) x^2 + (p_m p_{m+3} - p_{m+1} p_{m+2}) x + p_{m+2}^2 - p_{m+1} p_{m+3} = 0;$$

sicuti notum est, et cum *Euleri* formulis convenit.

Sit $k = 3$, habes

$$0 = x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$
$$0 = p_{m+3} + A_1 p_{m+1} + A_2 p_{m+1} + A_3 p_m$$
$$0 = p_{m+4} + A_1 p_{m+3} + A_2 p_{m+2} + A_3 p_{m+1}$$
$$0 = p_{m+5} + A_1 p_{m+4} + A_2 p_{m+3} + A_3 p_{m+2},$$

unde eliminatis A_1, A_2, A_3 provenit:

$$Px^3 + P_1 x^2 + P_2 x + P_3 = 0,$$

posito:

$$P = p_{m+2}^3 + p_{m+1}^2 p_{m+4} + p_m p_{m+3}^2 - 2 p_{m+1} p_{m+2} p_{m+3} - p_m p_{m+2} p_{m+4}$$
$$P_1 = p_{m+1} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+4} + p_m p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+3} - p_{m+1}^2 p_{m+5} - p_m p_{m+3} p_{m+4}$$
$$P_2 = p_m p_{m+4}^2 + p_{m+2} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+4} - p_m p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+3} p_{m+4}$$
$$P_3 = 2 p_{m+2} p_{m+3} p_{m+4} + p_{m+1} p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+3}^3 - p_{m+1}^2 p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+4}^2.$$

Methodus Clarissimi *Daniel Bernoulli* nititur principio, quod seriei recurrentis termini ab initio satis remoti ut termini seriei geometricae spectari possint. Methodus antecedentibus amplificata tantum supponit, terminos seriei recurrentis ab initio satis remotos proxime aequales esse terminis alius seriei recurrentis, cuius scala e minore terminorum numero constat. Quam igitur scalam, ideoque etiam aequationem, cuius radices radicibus maximis aequationis propositae proxime aequales sunt, eruere licet etiam per methodum, quam olim pro investiganda lege serierum recurrentium proposuit ill. *Lagrange* in commentatione:

Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations.

Videlicet, si seriem recurrentem, cuius scala $n+1$ terminis constat, inde a termino p_m convenire statuimus cum alia, cuius scala tantum $k+1$ terminis constat, ponamus

$$p_m + p_{m+1} y + p_{m+2} y^2 \ldots + p_{m+2k-1} y^{2k-1} = s,$$

sit porro

$$\frac{1}{s} = a_1 + b_1 y + y^2 s_1,$$
$$\frac{1}{s_1} = a_2 + b_2 y + y^2 s_2,$$
$$\frac{1}{s_2} = a_3 + b_3 y + y^2 s_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{s_{k-1}} = a_k + b_k y + y^2 s_k.$$

Seriem s_1 continuemus usque ad potestatem y^{2k-3}, seriem s_2 usque ad potestatem y^{2k-5}, et ita porro, donec series s_k plane reiiciatur. Tum si fractionem continuam

$$\cfrac{1}{a_1 + b_1 y + \cfrac{y^2}{a_2 + b_2 y + \cfrac{y^2}{a_3 + b_3 y + \cdots + \cfrac{y^2}{a_k + b_k y}}}}$$

in fractionem vulgarem commutas $\frac{P}{Q}$, atque in denominatore statuis $y = \frac{1}{x}$, erit

$$Q = 0$$

aequatio quaesita, cuius radices $x = \frac{1}{y}$ aequationis propositae $X = 0$, k radicibus maioribus proxime aequales sunt. Sed observo, hanc methodum multo prolixiorem esse, quam eam eliminationis, quam supra proposui: nam in calculanda fractione $\frac{P}{Q}$ in expressiones valde complicatas incidis, quarum termini plurimi in fine calculi se mutuo destruunt, dum per eliminationem statim ad expressiones simplices pervenis.

Prorsus eadem ratione aequationis propositae radices minimas investigare licet; quod problema posito $x = \frac{1}{y}$ etiam ad antecedens revocatur; nam aequationis transformatae radices maximae sunt valores reciproci radicum minimarum aequationis propositae. Hinc si methodo *Bernouilliana* antecedentibus amplificata aequationis propositae radices omnes indagare placet, duae primum investigandae sunt aequationes, quarum altera x maximas, altera $n-k$ minimas radices exhibet; et si k aut $n-k$ maiores adhuc numeri sunt, quam ut per methodos rigorosas solutio praestet, singulas aequationes rursus eodem modo tractare licet atque propositam, donec tandem ad singulas radices aequationis propositae, sive ad aequationis gradum satis depressum pervenias.

D. 9. Dec. 1834.

26.

De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

Illustris Academia Petropolitana ante hos quatuor annos commentationes posthumus VV. Cll. *Euler*, *Schubert*, *Fuſs*, quae nondum lucem viderant, in unum volumen collegit — nam quadragesimo anno post *Euleri* mortem eius adhuc quatuordecim commentationes publicandae restabant. In quo volumine pluribus commentationibus *Eulerus* tractat problema et quasi ad perfectionem ducit, quod diversis temporibus varia eius tentamina provocaverat, videlicet

„dato numero rationali x, qui expressionem $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$ et ipsam rationalem reddit, alios eiusmodi innumeros valores ipsius x detegendi."

In quibus commentationibus non adnotavit vir — quod bene est supplere — analysin solutionis ab eo traditae aliam non esse nisi multiplicationis integralium ellipticorum — quamquam utriusque analysis autorem consensum illum memorabilem non fugisse, probabile est.

Statuamus $f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, $\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(f(x))}}$, docet *Eulerianum* theorema de additione integralium ellipticorum,

I. „proposita aequatione transcendenti $\Pi(z) = \Pi(x)+\Pi(y)$, simul et ipsum z et ipsum $\sqrt{[f(z)]}$ *rationaliter* exhiberi per x, y, $\sqrt{[f(x)]}$, $\sqrt{[f(y)]}$."

Unde sequitur theorema:

II. „proposita aequatione $\Pi(y) = n\Pi(x)$, ubi n numerus integer, simul et ipsum y et ipsum $\sqrt{[f(y)]}$ per x, $\sqrt{[f(x)]}$ *rationaliter* exhiberi,"

vel generalius

III. „proposita aequatione

$$\Pi(x) = m_1\Pi(x_1)+m_2\Pi(x_2)\ldots.+m_n\Pi(x_n),$$

ubi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt numeri integri quilibet positivi vel negativi, simul et ipsum x et radicale $\sqrt{[f(x)]}$ per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et radicalia $\sqrt{[f(x_1)]}, \sqrt{[f(x_2)]}, \ldots, \sqrt{[f(x_n)]}$ *rationaliter* exprimi."

Patet iam e theoremate II., si pro dato ipsius x uno valore rationali etiam $\sqrt{[f(x)]}$ rationale fiat, inde per analysin multiplicationis integralium ellipticorum innumeros alios valores rationales y deduci posse, qui et ipsum $\sqrt{[f(y)]}$ rationale reddant. Valores enim omnes y, qui aequationi $\Pi(y) = n\Pi(x)$ satisfaciunt, in qua x datum valorem designat, et n numerum quemlibet integrum, e theoremate assignato proposito satisfaciunt. Ac reapse *Euleri* Analysis, qua utitur in volumine citato (Mémoires postlumes de *L. Euler*, *F. T. Schubert* et *N. Fuſs* ci-devant membres de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg) ad solvendum problema Diophanteum, prorsus eadem est atque ea, quam in Institutionibus Calculi Integralis aliisque locis ad aequationem transcendentem $\Pi(y) = n\Pi(x)$ algebraice solvendam proposuit.

Patet porro e theoremate III., datis duobus valoribus rationalibus x_1, x_2, pro quibus etiam $\sqrt{[f(x_1)]}$, $\sqrt{[f(x_2)]}$ rationalia fiant, si neuter modo antecedentibus exposito ex altero derivari potest, praeter valores novos per methodum antecedentem ex iis deductos innumeros alios x, qui proposito satisfaciant, dari per aequationem

$$\Pi(x) = m_1\Pi(x_1) + m_2\Pi(x_2),$$

in quibus m_1, m_2 numeros quoslibet integros positivos vel negativos designant; et ita porro pro novis valoribus e tribus, quatuor, etc. datis derivandis.

Exceptionum casus proveniunt, si pro dato valore a fit $\Pi(a)$ pars aliquota indicis; siquidem ea, quae in commentationibus nostris de indicibus functionum ellipticarum proposuimus, ad formam generaliorem integralis $\Pi(x)$, qualem hic consideramus, extendis.

Si vero quaeris, quaenam e theoremate *Abeliano*, mira illa theorematis *Euleriani* amplificatione, in artem Diophanteam incrementa redundent, facile e thoremate illo rite examinato hanc deducis propositionem:

„designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram quinti aut sexti ordinis, si datur unus valor ipsius x rationalis, pro quo etiam $\sqrt{[f(x)]}$ rationale fiat, dantur innumeri ipsius x valores formae $a + b\sqrt{c}$, in qua a, b, c quantitates rationales, pro quibus etiam $\sqrt{[f(x)]}$ eandem formam induit $a' + b'\sqrt{c}$, ubi rursus a', b' rationales;"

ac generaliorem:

„designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram $(2n+1)^{ti}$ aut $(2n+2)^{ti}$ ordinis, si datur valor ipsius x rationalis, pro quo

etiam $\sqrt{[f(x)]}$ rationale fiat, dantur innumerae aequationes n^{ti} gradus, quarum coëfficientes numeri rationales sunt, ita comparatae, ut designante x earum radicem quamlibet, radicale $\sqrt{[f(x)]}$ per ipsam radicem x et numeros rationales rationaliter exhiberi queat."

Multo vero generaliora adhuc, si loco $\sqrt{[f(x)]}$ radicem ullius aequationis algebraicae consideras, quarum coëfficientes sunt dati numeri rationales, e theorematis Abelianis petere licet, quae de integralibus functionum algebraicarum quarumcunque proposita sunt.

Nec non monere iuvat, cum ex antecedentibus *Euleri* de dicto problemate Diophantea scripta etiam ad analysin functionum ellipticarum pertineant, Calculi integralis amatores ea non sine fructu perlegere.

Regiom. 20 Dec. 1834.

27.

Ein neuer Satz über die Primzahlen.

(Von dem Herrn Prof. der Math. Dr. *Steiner*, an der Universität zu Berlin.)

---

1. Der Satz, welcher hier bewiesen werden soll, lautet wie folgt:

„Hat man irgend eine Primzahl p und $p-1$ beliebige andere Zahlen, welche durch p nicht theilbar sind, sondern nach irgend einer Ordnung die verschiedenen Reste 1, 2, 3, ..., $p-1$ geben, oder auch, was im Grunde auf dasselbe hinauskommt, nach irgend einer Ordnung genommen, diese Reste selbst sind, und man combinirt von diesen Zahlen irgend eine Anzahl n zur $p-n^{ten}$ Classe mit Wiederholung aber ohne Versetzung und multiplicirt die Zahlen jeder Complexion in einander: so ist die Summe aller dieser Producte immer durch p theilbar, die Zahl n mag sein, von 2 bis $p-1$ inclusive, welche man will."

Beweis. Wird jeder Theil der identischen Gleichung

$$x = (x-a_1)+a_1$$

mit x multiplicirt, nämlich der Theil links mit x, das erste Glied rechts mit $(x-a_2)+a_2$ und das zweite mit $(x-a_1)+a_1$, so erhält man, nach gehöriger Ordnung:

$$x^2 = (x-a_1)(x-a_2)+a_1\left|\begin{matrix}\\ a_2\end{matrix}\right|(x-a_1)+a_1^2.$$

Werden die Glieder der letzten Gleichung ähnlicher Weise beziehlich mit

$$x = (x-a_3)+a_3 = (x-a_2)+a_2 = (x-a_1)+a_1$$

multiplicirt, so kommt:

$$x^3 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+a_1\left|\begin{matrix}\\ a_2\\ a_3\end{matrix}\right|(x-a_1)(x-a_2)+a_1^2\left|\begin{matrix}\\ a_1.a_2\\ a_2^2\end{matrix}\right|(x-a_1)+a_1^3.$$

Gleicherweise gelangt man zu der Gleichung:

$$x^4 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+a_1\left|\begin{matrix}\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{matrix}\right|(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+a_1^2\left|\begin{matrix}\\ a_1.a_2\\ a_1.a_3\\ a_2^2\\ a_2.a_3\\ a_3^2\end{matrix}\right|(x-a_1)(x-a_2)+a_1^3\left|\begin{matrix}\\ a_1^2.a_2\\ a_1.a_2^2\\ a_2^3\end{matrix}\right|(x-a_1)+a_1^4.$$

und, durch Wiederholung desselben Verfahrens, zu der allgemeinen Gleichung:

$$x^{p-1} = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-1}) + a_1 \left|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1}\end{matrix}\right| (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-2})$$

$$+ \begin{matrix} a_1^2 \\ a_1.a_2 \\ a_1.a_3 \\ \vdots \\ a_1.a_{p-2} \\ a_2^2 \\ a_2.a_3 \\ \vdots \\ a_{p-2}^2 \end{matrix}\left|\begin{matrix}\end{matrix}\right| (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-3}) + \ldots + \begin{matrix} a_1^{p-2} \\ a_1^{p-3}.a_2 \\ a_1^{p-4}.a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^{p-2} \end{matrix}\left|\begin{matrix}\end{matrix}\right| (x-a_1) + a_1^{p-1},$$

oder, in einfachen Zeichen:

$$x^{p-1} = X_{p-1} + A_1 X_{p-2} + A_2 X_{p-3} + A_3 X_{p-4} + \ldots + A_{p-2} X_1 + A_{p-1}.$$

Das Gesetz, wonach die Glieder dieser Gleichung gebildet werden, fällt in die Augen. Nämlich der Coefficient A_1 des zweiten Gliedes rechts ist die Summe der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$; der Coefficient A_2 des dritten Gliedes ist die Summe der Producte, die entstehen, wenn man die $p-2$ Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{p-2}$, mit Wiederholung aber ohne Versetzung, zu zwei combinirt und in einander multiplicirt; u. s. w.

Wird nun angenommen, p sei irgend eine Primzahl, und die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$ seien nicht durch p theilbar, und lassen, durch p dividirt, verschiedene Reste, also, nach irgend einer Ordnung genommen, die Reste 1, 2, 3, ..., $p-1$; und wird ferner auch die willkürliche Zahl x als nicht durch p theilbar vorausgesetzt: so ist, wenn man das letzte Glied rechts auf die linke Seite bringt, die Differenz

$$x^{p-1} - a_1^{p-1},$$

vermöge des Fermat'schen Satzes, durch p theilbar. Giebt man nun dem x für einen Augenblick einen solchen Werth, dafs $(x-a_2)$ durch p theilbar wird, so sind alle Glieder rechts, welche $(x-a_2)$ zum Factor haben, durch p theilbar; daher mufs auch das nunmehrige letzte Glied

$$A_{p-2} X_1 = (a_1^{p-2} + a_1^{p-3}.a_2 + a_1^{p-4}.a_2^2 + \ldots + a_2^{p-2})(x-a_1)$$

durch p theilbar sein; und zwar mufs es nothwendig der erste Factor dieses

Gliedes sein, da, vermöge der Voraussetzung, der andere $(x-a_1)$, es nicht sein kann.

Bringt man nun ferner auch dieses letzte Glied $A_{p-2}.X_1$ auf die linke Seite der Gleichung, so ist der erste Theil derselben durch p theilbar; und giebt man sodann dem x einen solchen besondern Werth, dafs der Factor $(x-a_3)$ durch p theilbar wird, so folgt ähnlicherweise, wie vorhin, dafs nun auch das gegenwärtige letzte Glied rechts, $A_{p-3}.X_2$ durch p theilbar sein mufs, und zwar, da von den zwei Factoren $(x-a_1)$, $(x-a_2)$ jetzt keiner durch p theilbar sein kann, dafs sein Coefficient, nämlich

$$A_{p-3} = a_1^{p-3} + a_1^{p-4}.a_2 + a_1^{p-4}.a_3 + a_1^{p-5}.a_2^2 + \ldots + a_2.a_3^{p-4} + a_3^{p-3},$$

durch p theilbar ist.

Gleicherweise folgert man, dafs jeder der übrigen Coefficienten A_{p-4}, A_{p-5}, ..., A_2, A_1 durch p theilbar ist; wodurch die Richtigkeit des oben stehenden Satzes dargethan wird.

Um den Satz durch ein Beispiel anschaulich zu machen, sei $p=7$, $n=13$ und $a_1=5$, $a_2=4$, $a_3=3$, so sind die Zahlen 5, 4, 3 zur $7-3=4$ten Classe mit Wiederholung aber ohne Versetzung zu combiniren, sodann in einander zu multipliciren und die Producte zu addiren. Dies giebt:

$$5^4+5^3.4+5^3.3+5^2.4^2+5^2.4.3+5^2.3^2+5.4^3+5.4^2.3+5.4.3^2+5.3^3$$
$$+4^4+4^3.3+4^2.3^2+4.3^3+3^4$$
$$= 625+500+375+400+300+225+320+240+180+135+256$$
$$+192+144+108+81 = 4081 = 583.7,$$

welches Resultat, wie man sieht, dem obigen Satze genügt.

2. Aus dem ersten Gliede rechts, in der obigen Gleichung, nämlich aus dem Gliede

$$X_{p-1} = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_{p-1}),$$

lassen sich, mit Rücksicht auf den vorstehenden Beweis, leicht zwei andere, bekannte, Sätze ableiten. Wird nämlich dieses Glied entwickelt, so hat man:

$$X_{p-1} = x^{p-1} - a_1 \left| \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{matrix} \right| x^{p-2} + a_1 \left| \begin{matrix} .a_2 \\ a_1 .a_3 \\ \vdots \\ a_{p-2}.a_{p-1} \end{matrix} \right| x^{p-3} - \ldots + a_1.a_2.a_3\ldots a_{p-1},$$

oder

$$X_{p-1} = x^{p-1} - \mathfrak{A}_1.x^{p-2} + \mathfrak{A}_2.x^{p-3} - \mathfrak{A}_3.x^{p-4} + \ldots - \mathfrak{A}_{p-2}.x + \mathfrak{A}_{p-1},$$

wo, wie man sieht, die Coefficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ..., $\mathfrak{A}_{p-1}$ die einfachen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Zahlen a_1, a_2, ..., a_{p-1} zur ersten, zweiten, dritten, ... $(p-1)$ten Classe vorstellen. Hierdurch läfst sich die obige Gleichung wie folgt umändern:

$$(\mathfrak{A}_1.x^{p-2}-\mathfrak{A}_2.x^{p-3}+\mathfrak{A}_3.x^{p-4}-....+\mathfrak{A}_{p-2}.x)$$
$$-(A_1.X_{p-2}+A_2X_{p-3}+A_3X_{p-4}+....+A_{p-2}.X_1)=\mathfrak{A}_{p-1}+A_{p-1}.$$

Wird nun angenommen, x sei durch p theilbar, oder, was dasselbe bewirkt, es sei $x=0$, so ist der erste Theil der gegenwärtigen Gleichung durch p theilbar, (weil jedes Glied in der ersten Klammer den Factor x enthält, und die Coefficienten der Glieder in der zweiten Klammer einzeln mit p aufgehen, zufolge des obigen Beweises); daher mufs auch der zweite Theil derselben, d. i.

$$\mathfrak{A}_{p-1}+A_{p-1}, \quad \text{oder} \quad a_1.a_2.a_3....a_{p-1}+a_1^{p-1},$$

durch p theilbar sein; und da nach dem Fermatischen Satze das eine Glied a_1^{p-1}, durch p dividirt, den Rest $+1$ giebt, so mufs das andere

$$a_1.a_2.a_3....a_{p-1},$$

durch p dividirt, den Rest $p-1$, oder -1 geben, oder, in der einfachsten Form, es mufs

$$1.2.3.4....(p-1)+1$$

durch p theilbar sein, d. h., „wird dem Product aus allen Zahlen 1, 2, 3, ..., $(p-1)$, welche kleiner als eine gegebene Primzahl p sind, 1 zugezählt, so ist die Summe allemal durch p theilbar;" welches der bekannte Wilson'sche Satz ist.

Werden ferner alle Glieder, welche in der obigen Gleichung auf der linken Seite in der zweiten Klammer stehen, nämlich die Glieder

$$A_1X_{p-2}+A_2X_{p-3}+A_3X_{p-4}+....+A_{p-2}X_1$$

nach Potenzen von x entwickelt, so erhält man ein Aggregat von der Form

$$A_1x^{p-2}+\begin{matrix}A_1.B_1\\A_2\end{matrix}\Big|x^{p-3}+\begin{matrix}A_1.B_2\\A_2.C_1\\A_3\end{matrix}\Big|x^{p-4}+\begin{matrix}A_1.B_3\\A_2.C_2\\A_3.D_1\\A_4.\end{matrix}\Big|x^{p-5}+....+\begin{matrix}A_1.B_{p-2}\\A_2.C_{p-3}\\A_3.D_{p-4}\\\vdots\\A_{p-2}\end{matrix}\Big|x+S,$$

wo die Gröfsen B_1, B_2, ..., B_{p-2}; C_1, C_2, ...; D_1, D_2, ... u. s. w. kein x enthalten, sondern nur bestimmte Combinationen der Zahlen

$a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$; $a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}$; .... Werden diese Werthe in die Gleichung

$$(\mathfrak{A}_1 x^{p-2} - \mathfrak{A}_2 x^{p-3} + \mathfrak{A}_3 x^{p-4} - \ldots + \mathfrak{A}_{p-2} x)$$
$$-(A_1 X_{p-2} + A_2 X_{p-3} + \ldots + A_{p-2} X_1) = A_{p-1} + A_{p-1}$$

substituirt, und wird bemerkt, dafs diese Gleichung für jeden Werth, welchen man dem x beilegen mag, statt finden mufs, so folgt, dafs die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich sein müssen, dafs also, absolut genommen:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1; \quad \mathfrak{A}_2 = A_1.B_1 + A_2; \quad \mathfrak{A}_3 = A_1.B_2 + A_2.C_1 + A_3; \ldots.$$

sein mufs. Da nun, vermöge des obigen Beweises, von den Gröfsen A_1, A_2, A_3, ..., A_{p-2} jede, einzeln genommen, durch p theilbar ist, so folgt aus den letzten Gleichungen, dafs auch jede der Gröfsen

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots, \mathfrak{A}_{p-2}$$

durch p theilbar sein mufs. Das heifst:

„Hat man eine Primzahl p, und $p-1$ beliebige andere Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$, welche nicht durch p theilbar sind und auch nicht gleiche Reste geben, oder welche, in einfachster Form, die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., $(p-1)$ selbst sind: so ist sowohl die Summe dieser Zahlen $\mathfrak{A}_1$, als die Summe ihrer Producte, wenn sie zu 2, oder 3, oder 4, ..., oder $p-2$, ohne Wiederholung und ohne Versetzung combinirt werden, d. i. $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots, \mathfrak{A}_{p-2}$ durch p theilbar."

Diesen Satz hat bekanntlich Lagrange zuerst bewiesen.

Ich will noch bemerken, dafs die Gröfse $\mathfrak{A}_3$, d. i. die Summe der Producte zu dreien, nicht nur durch p, sondern auch allemal durch p^2 theilbar ist, was leicht zu beweisen ist. Ferner läfst sich beweisen, dafs die Summe der Producte aus den Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$, zu 2, oder 3, oder 4, ..., mit Wiederholung, aber ohne Versetzung combinirt, stets durch p theilbar ist; und dafs dasselbe statt findet, wenn man die zweiten, oder dritten, oder vierten, ... Potenzen derselben Zahlen auf gleiche Weise, oder nach einer der oben angegebenen Arten, combinirt.

Berlin, im Dec. 1834.

28.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.)

1. Die Summe aller Brüche von der Form

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1},$$

wo sowohl für x als für y jede ganze positive Zahl von 0 an gesetzt werden mufs, jedoch mit der Bedingung, dafs jeder Bruch, welcher mehrmal durch diese Form erhalten wird, wie z. B. $\frac{1}{63}$, welcher dreimal sich unter dieser Form darstellen läfst, nemlich als $\frac{1}{2^6-1}$, $\frac{1}{4^3-1}$, $\frac{1}{8^2-1}$, nur einmal gerechnet wird, oder, was auch durch die Einschränkung beseitigt werden kann: es dürfe $2+x$ keine höhere Potenz (d. i. zweite, dritte, vierte u. s. w.) von irgend einer Zahl, mithin x nicht 6, 7, 14, 23, 25, 30, 34, 47, 62, 79 u. s. w. sein, ist $=1$, also, in Zeichen:

$$1=\Sigma\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{26}+\tfrac{1}{31}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{63}$$
$$+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{99}+\tfrac{1}{120}+\tfrac{1}{124}+\tfrac{1}{127}+\ldots. \text{ in infin.}$$

2. Die Summe aller negativen Potenzen, von der zweiten an, aller ganzen positiven Zahlen von 2 an, ist $=1$, oder in Zeichen:

$$1=\Sigma(2+x)^{-2}+\Sigma(2+x)^{-3}+\Sigma(2+x)^{-4}+\Sigma(2+x)^{-5}+\ldots. \text{ in infin.},$$

wo unter jedes Summenzeichen für x alle ganzen positiven Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... zu setzen sind.

Hieraus folgt insbesondere der bekannte Satz:

„Dafs die negativen zweiten Potenzen aller ganzen positiven Zahlen eine convergirende Reihe bilden."

Ferner folgt daraus, dafs, da man bekanntlich die Werthe der einzelnen Summen

$$\Sigma(2+x)^{-2},\quad \Sigma(2+x)^{-4},\quad \Sigma(2+x)^{-6},\quad \ldots\ldots\quad \Sigma(2+x)^{-2n}$$

angeben kann, man auch, wenn gleich nicht die Werthe der einzelnen Summen $\Sigma(2+x)^{-3}$, $\Sigma(2+x)^{-5}$, ... $\Sigma(2+x)^{-2n+1}$, so doch den Werth der Summe dieser Summen darstellen kann, indem, zufolge des

vorstehenden Satzes,

$$\Sigma(2+x)^{-3}+\Sigma(2+x)^{-5}+\Sigma(2+x)^{-7}+\ldots.$$
$$=1-[\Sigma(2+x)^{-2}+\Sigma(2+x)^{-4}+\Sigma(2+x)^{-6}+\ldots.].$$

3. Durch Verbindung der beiden vorstehenden Sätze (1. und 2.) gelangt man zu dem folgenden Satze.

Die Summe aller Brüche von der Form

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}[(2+x)^{2+y}-1]}$$

ist gleich der Summe aller Brüche (oder negativen Potenzen) von der Form

$$(2+z)^{-(2+y)},$$

wo für y jede ganze positive Zahl, von 0 an, gesetzt werden mufs, für x aber nur diejenigen ganzen positiven Zahlen, für welche die Summe $2+x$ keine (höhere) Potenz von irgend einer Zahl wird (wie oben (1.)), für z dagegen alle diejenigen ganzen positiven Zahlen, welche für x ausgeschlossen sind, so dafs also die Summe $2+z$ allemal irgend eine höhere Potenz sein mufs. Unter diesen Bedingungen ist also

$$\Sigma\frac{(2+x)^{-(2+y)}}{(2+x)^{-(2+y)}-1}=\Sigma(2+z)^{-(2+y)},$$

oder

$$\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{72}+\tfrac{1}{240}+\tfrac{1}{600}+\tfrac{1}{702}+\tfrac{1}{992}+\ldots. \text{ in infin.}$$
$$=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{250}+\tfrac{1}{250}+\ldots. \text{ in infin.}$$

Die vorstehenden drei Sätze lassen sich, unter andern, durch eine ganz elementare Betrachtung beweisen.

4. Bezeichnet man die Geraden, welche drei feste Puncte A, B, C mit irgend einem vierten Puncte P in ihrer Ebene verbinden, durch a, b, c, und die Winkel, die sie mit einander bilden, durch $(a\,b)$, $(a\,c)$, $(b\,c)$, so müssen, wenn der Punct P die Eigenschaft haben soll, dafs die Summe der $x$ten Potenzen der Geraden a, b, c ein Minimum, also

$$a^x+b^x+c^x=\text{minim.}$$

sei, im Allgemeinen die folgenden zwei Bedingungen statt finden:

$$\alpha)\quad a^{x-1}.\sin(a\,c)=b^{x-1}.\sin(b\,c)\quad\text{und}$$
$$\beta)\quad a^{x-1}.\sin(a\,b)=c^{x-1}.\sin(c\,b).$$

Dieser Satz umfafst insbesondere zwei bekannte Sätze *), die man erhält,

*) Andrerseits ist er ein besonderer Fall eines mehrfach allgemeinern Satzes, welchen ich bei einer andern Gelegenheit beweisen werde.

wenn man

1) $x = 2$ setzt, oder wenn die Summe der Quadrate $a^2 + b^2 + c^2$ ein Minimum sein soll. Für diesen Fall ist P der Schwerpunct des Dreiecks ABC, und man hat, als Bedingungen:

$$a \cdot \sin(a\,c) = b \cdot \sin(b\,c) \text{ und}$$
$$a \cdot \sin(a\,b) = c \cdot \sin(c\,b).$$

2) Wenn man $x = 1$ setzt, oder, wenn die Summe der drei Abstände $a + b + c$ ein Minimum, also P der Punct der kleinsten Entfernung von den drei festen Puncten A, B, C sein soll. Für diesen Fall reduciren sich die obigen Bedingungen auf:

$$\sin(a\,b) = \sin(a\,c) = \sin(b\,c),$$

oder auch

$$\text{Wink.}(a\,b) = (a\,c) = (b\,c).$$

5. Wenn man bei dem vorigen Satze (4.) dem Exponenten x alle möglichen Werthe giebt, oder wenn man x sich stetig verändern läfst: welches ist alsdann der Ort des Punctes P? und welche eigenthümliche Beziehung hat dieser Ort zu den drei festen Puncten A, B, C?

6. Für beliebige Puncte eines Kegelschnitts läfst sich der Krümmungshalbmesser auf folgende sehr einfache Weise construiren.

Es sei z. B. eine Ellipse ACB (Taf. III. Fig. 5.) gegeben: man soll den Krümmungshalbmesser für irgend einen Punct C finden.

Man ziehe eine Axe AB der Ellipse (gleichviel welche), lege in dem Puncte C die Tangente CD, die von der Axe in D begrenzt wird, und errichte auf dieselbe in C die Normale CM. Mit der Tangente CD beschreibe man um C einen Kreis, welcher die Axe AB zum zweiten male in E schneidet; ziehe die Gerade CE, welche der Ellipse zum zweiten male in F begegnet, errichte auf die Sehne CF, in ihrer Mitte G, die Senkrechte GM: so wird diese die Normale CM im Krümmungs-Mittelpuncte M schneiden, so dafs MC der verlangte Krümmungs-Halbmesser ist.

Bemerkung zu dem Aufsatze No. 14. dieses Bandes. Das hier gefundene Resultat: „dafs die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen abgeleitet werden können," findet sich auch in der „Analysis" von Schweins, vom

Jahre 1820, und besonders klar und umfassend hat dieser nämliche ausgezeichnete Combinatoriker denselben Gegenstand in seiner neuern Schrift „Gröfsenlehre, systematisch bearbeitet," Leipzig, bei Leop. Vofs, 1833, behandelt.

Errata

pour le *Mèmoire* de Mr. Liouville *sur une formule d'Analyse* inséré dans le tome XII. de ce journal, 4ème cahier.

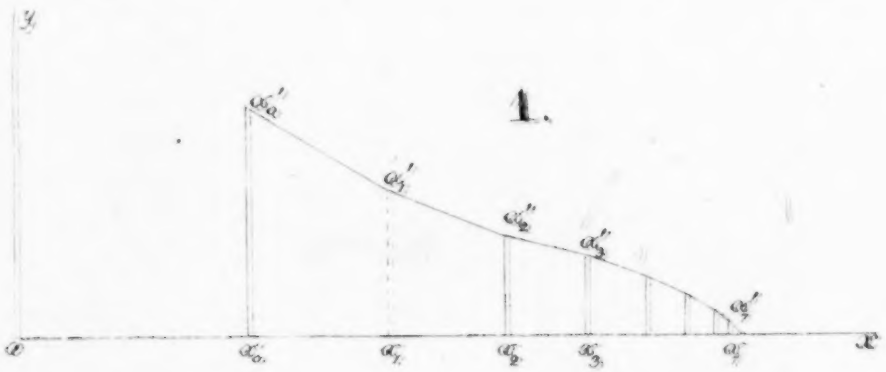
Page 273, ligne 5, au lieu de $\int^{\infty}$, lisez $\int_0^{\infty}$,
— 274, — 15: ajoutez dans le second membre de l'équation le facteur $\varphi(x+nh)$.
— — — 17, au lieu de $\int^{x}$ lisez $\int^{\mu}$.
— 276, — 21, au lieu de $F(x+\beta)$, lisez $F'(x+\beta)$.
— 278, — 19, au lieu de ξ lisez ζ.
— 280, — 1, au lieu de $\int^{\frac{\pi}{2}}$, lisez $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$.
— 280, — 17, au lieu de $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2\pi}$ lisez $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2x}$.
— 284, — 11, au lieu de (F), lisez (E).

Errata in diesem Bande.

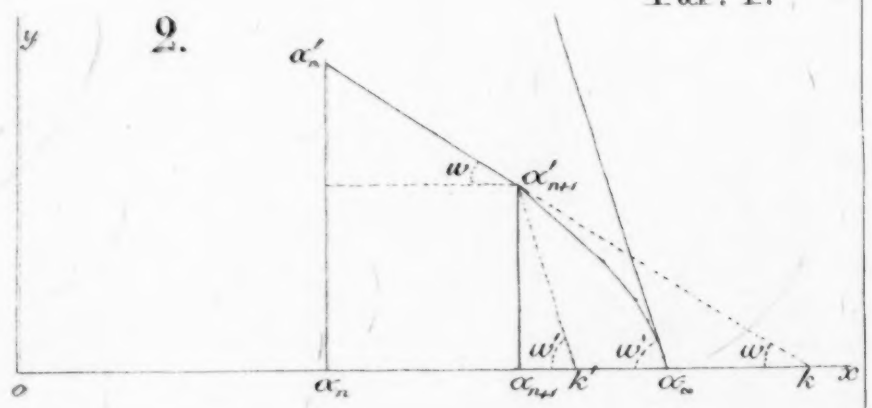
Seite 60 Zeile 10, 11 statt numeros integros p, aut n, lies numeros integros positivos aut negativos.
— 62 — 7 st. valor ipsius x l. valor ipsius X.
— — — 16 st. $\frac{-1}{\mu^2 tg^2\varphi}$ l. $\frac{-1}{\mu^2 \tang^2\varphi}$.
— — — 12 st. $\lambda(\mu)$ l. $\lambda(u)$.
— 63 — 4 v. u. st a° l. a 0.
— 66 — 5 st. z l. x.
— 67 — 20 st. $-\sqrt{-1}-u_1$ l. $-u_1\sqrt{-1}$.
— 68 — 17 st. $\frac{1}{k}$ l. $\frac{1}{x}$.
— 73 — 3 st. tantum multiplicatem l. tantam multiplicitatem.
— 277 — 1 st. 20 l. 21.
— 315 ist die Überschrift der Abhandlung, so wie die der Seiten von 315 bis 320 zu lesen: Aufstufungen der zusammengesetzten Functioneu.

Taf. I.

1.


y
x
0
x_0
x_1
x_2
x_3
x_r
α_0'
α_1'
α_2''
α_3'
α_r'

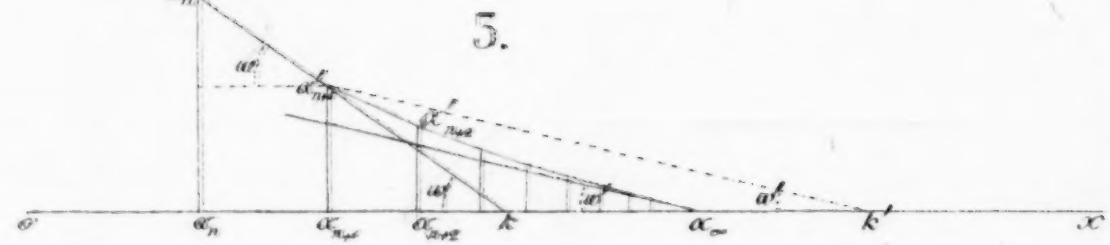
2.


y
x
0
α_n
α_{n+1}
k'
α_∞
k
α_n'
α_{n+1}'
w
w_1'
w_1'
w_1

3.

y
x
0
x_0
x_1
x_2
x_3
x_r
x_{r+1}
α_0'
α_1'
α_2''
α_3'
α_r'
α_{r+1}'

5.


a'
a'n+1
a'n+2
a'
a'
a'
o
an
an+1
an+2
k
a∞
k'
x

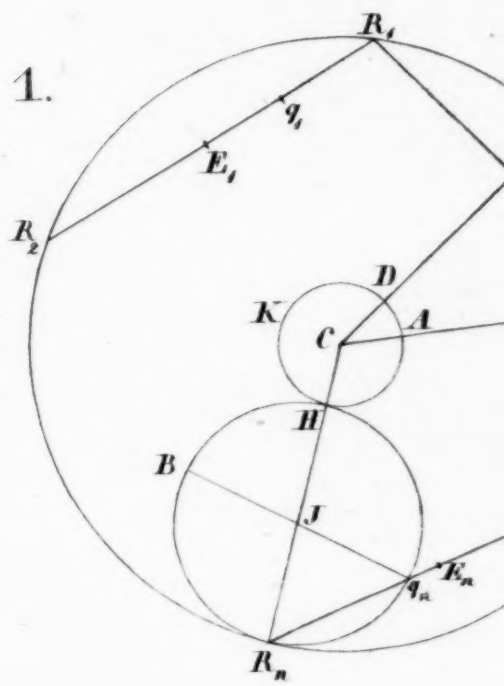
4.

a'n
a'n+1
a'n+2
a'n+3
a'n+4
b
b
an
an+1
an+2
an+3
an+4
a∞
x

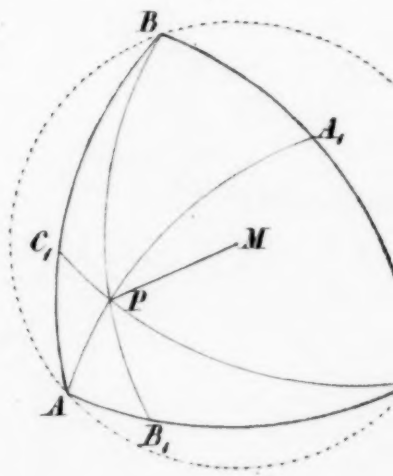
5.

a'n
a'n+1
a'n+2
a'n+3
a'n+4
o
an
an+2
an+4
an+2
an+1
x

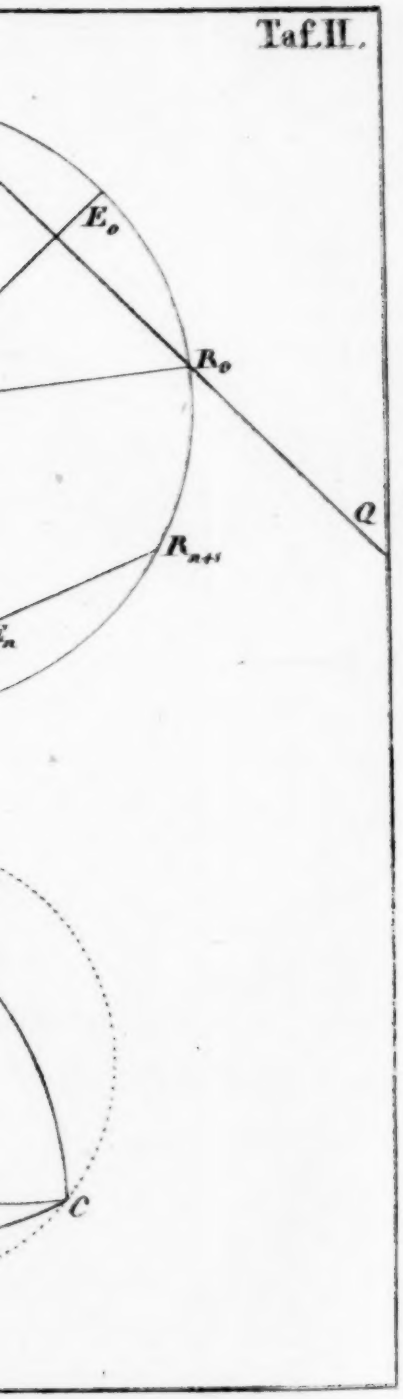
1.



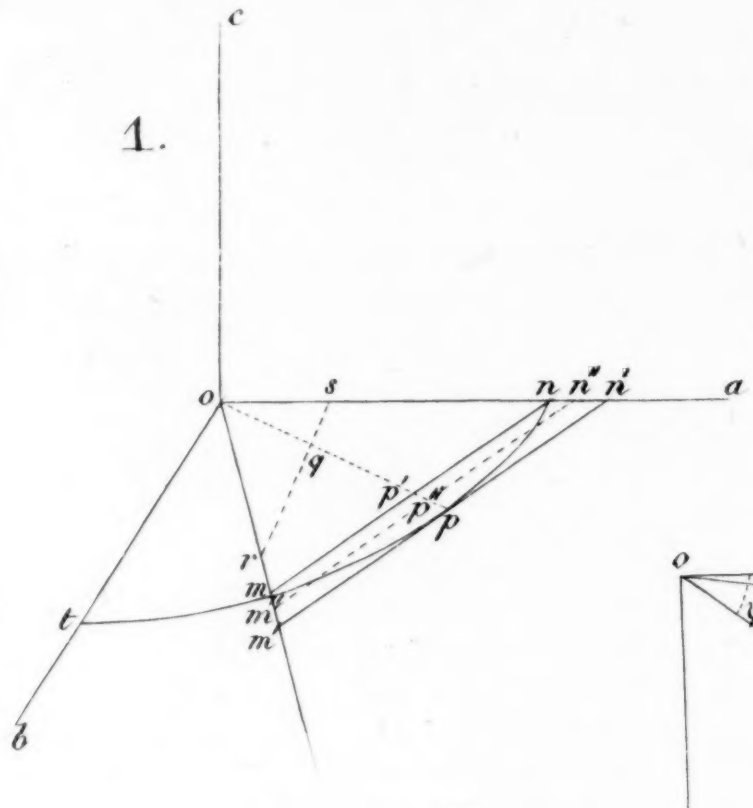
2.



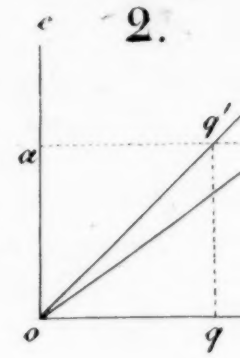
Taf. II.



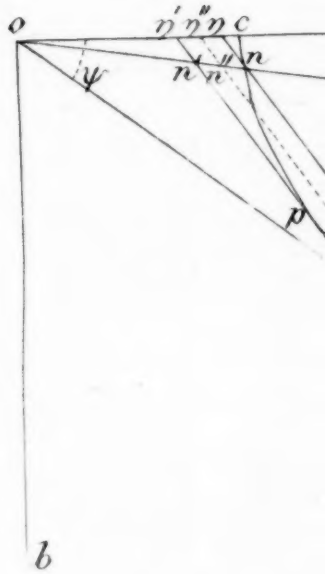
1.


c
o
s
n n'' n'
a
q
p'
p''
p
r
m
m'
m''
t
b

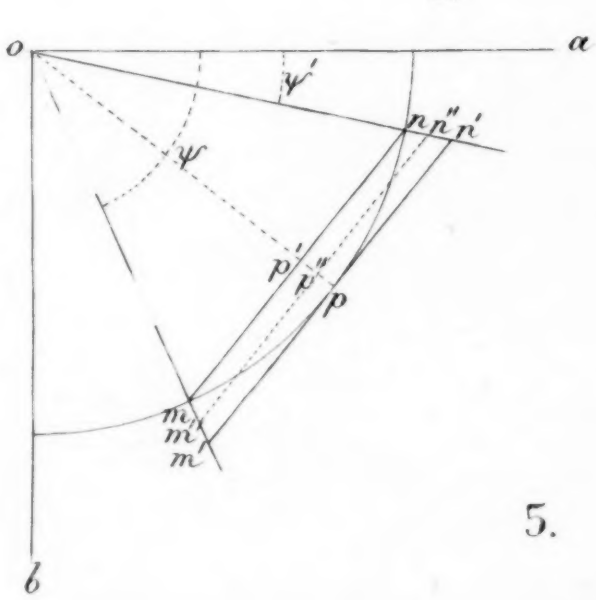
2.


c
q'
a
o
q

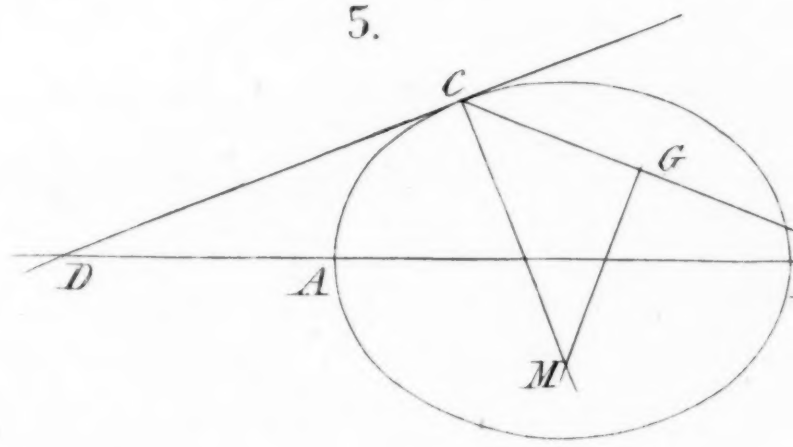
4


o
η' η'' η c
n
n' n''
ψ
p
b

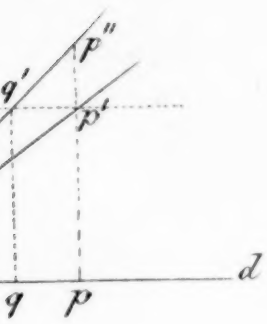
3.


o
a
ψ'
ψ
n n'' n'
p' p''
p
m
m'
m''
b

5.


C
G
D
A
M

Taf. III.



4.